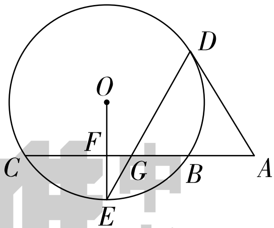
优质大题

1. 如图，在半径为 4 的 $\odot O$ 中，E 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，OE 交 BC 于点 F，D 为 $\odot O$ 上一点，DE 交 BC 于点 G，延长 CB 到点 A，使得 $AD=AG$.

(1)求证：AD 是 $\odot O$ 的切线；

(2)若 $\angle A=60°$，求 DE 的长.

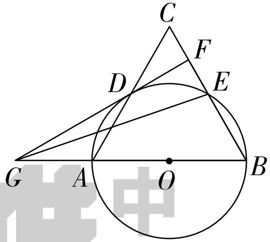


第 1 题图

2. 如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，以 AB 为直径的 $\odot O$ 分别与 AC 和 BC 交于点 D 和点 E，过点 D 的直线 GF 与 $\odot O$ 相切，且与 BC 交于点 F，与 BA 的延长线交于点 G.

(1) 求证：$GF \perp BC$；

(2) 连接 GE，若 $\odot O$ 的半径为 2，求 GE 的长.



第 2 题图

3. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点.

(1)求 b,c 的值及顶点坐标；

(2)点 M 是抛物线上一点且到 y 轴的距离小于 4，求出点 M 的纵坐标 y_M 的取值范围；

(3)若 $M(3n-4,y_1)$，$N(5n+6,y_2)$ 分别为抛物线上在对称轴两侧的点，且 $y_1>y_2$，求 n 的取值范围.

4. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+\frac{4}{3}x+c$ 与 x 轴交于点 $A(-1,0)$ 和点 B，且经过点 $C(2,2)$.

(1) 求 a,c 的值；

(2) 结合函数图象，当 $y<0$ 时，求自变量 x 的取值范围；

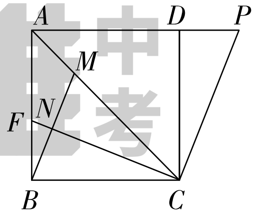
(3) 点 P 为抛物线上一点且到 y 轴距离小于 2，结合函数的图象求点 P 纵坐标 y_P 的取值范围.

5. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,点 P 为 AD 延长线上一点,连接 AC,CP,过点 C 作 $CF\perp CP$,交 AB 于点 F,过点 B 作 $BM\perp CF$ 于点 N,交 AC 于点 M.

(1)求证:$\triangle DCP\backsim\triangle BCF$;

(2)若 $AC=AP$, $\tan\angle BCF=\frac{1}{3}$,$DP=2$,求 CF 的值;

(3)若四边形 $ABCD$ 为正方形,且 $CP-BM=2FN$,$MC=5$,求 BC 的值.



第 5 题图

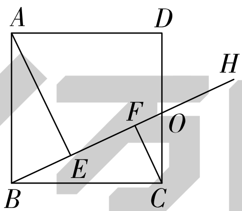
6. 如图①,在正方形 $ABCD$ 中,射线 BH 交 CD 于点 O,$AE\perp BH$ 于点 E,$CF\perp BH$ 于点 F.

(1)求证:$\triangle ABE\cong\triangle BCF$;

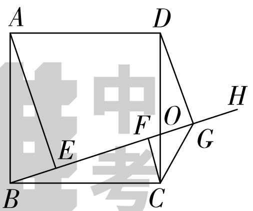
(2)如图②,过点 D 作 $DG\perp BH$ 于点 G,连接 CG.

①求证:$CF+DG=AE$;

②若 $AB=4$,$\dfrac{DO}{OC}=2$,求 $\triangle CFG$ 的面积.



图①

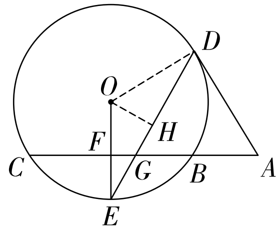


图②

第 6 题图

参考答案及解析

1. (1)**证明:**如解图,连接 OD.



第 1 题解图

$\because E$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点,

$\therefore OE\perp BC$,$\therefore \angle EFG=90^\circ$,

$\therefore \angle EGF+\angle OED=90^\circ$,

$\because OD=OE$,

$\therefore \angle ODE=\angle OED$,

$\because AD=AG$,$\therefore \angle AGD=\angle ADG$,

$\because \angle AGD=\angle EGF$,

$\therefore \angle ADG+\angle ODE=90^\circ$,即 $OD\perp AD$,

$\because OD$ 是$\odot O$ 的半径,$\therefore AD$ 是$\odot O$ 的切线;

(2)**解:**如解图,过点 O 作 $OH\perp ED$ 于点 H,

$\therefore DE=2DH$,

$\because AD=AG$,$\angle A=60^\circ$,

$\therefore \angle ADG=60^\circ$,$\therefore \angle ODE=30^\circ$,

$\because OD=4$,

$\therefore DH=OD\cdot\cos\angle ODE=2\sqrt{3}$,

$\therefore DE=2DH=4\sqrt{3}$.

2. (1)**证明:**如解图,连接 OD,

$\because GF$ 与$\odot O$ 相切于点 D,$\therefore OD\perp GF$,

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形,$\therefore \angle CAB=\angle B=60^\circ$,

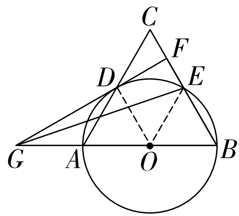
$\because OA=OD$,

$\therefore \triangle OAD$ 为等边三角形,$\therefore \angle DOA=60^\circ$,

$\therefore \angle DOA=\angle B$,$\therefore OD /\!/ BC$,$\therefore GF\perp BC$;

(2)**解:**如解图,连接 OE,

$\because \odot O$ 的半径为 2,$\triangle ABC$ 是等边三角形,



第 2 题解图

$\therefore AB=BC=AC=4$,$\angle C=60^\circ$,

由(1)可得 $AD=AO=2$,

$\therefore CD=AC-AD=2$,

$\because GF\perp BC$,

$\therefore CF=CD\cdot\cos C=2\cos 60^\circ=2\times\dfrac{1}{2}=1$,

$\therefore BF=BC-CF=3$,

$\because \angle B=60^\circ$,$\therefore GF=BF\cdot\tan 60^\circ=3\sqrt{3}$,

$\because OE=OB$,$\angle B=60^\circ$,

$\therefore \triangle OEB$ 为等边三角形,

$\therefore BE=OB=2$,$\therefore EF=1$,

$\therefore GE=\sqrt{GF^2+EF^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+1^2}=2\sqrt{7}$.

3. **解:**(1)$\because$ 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$,$B(3,0)$两点,

$\therefore \begin{cases}-1-b+c=0\\-9+3b+c=0\end{cases}$,解得$\begin{cases}b=2\\c=3\end{cases}$,

$\therefore b=2, c=3$,

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,

$\therefore$ 抛物线顶点的坐标为$(1,4)$;

(2)$\because -4<x<4, -1<0$,且抛物线的对称轴为直线 $x=1$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时,抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 取得最大值,最大值为 4;

当 $x=-4$ 时,$y=-21$;当 $x=4$ 时,$y=-5$,

$\therefore$ 点 M 的纵坐标 y_M 的取值范围是$-21<y_M\leqslant 4$;

(3)当点 M 在对称轴直线 $x=1$ 的左侧,点 N 在对称轴直线 $x=1$ 的右侧时,

由题意得$\begin{cases}3n-4<1\\5n+6>1\end{cases}$,

解得$-1<n<\dfrac{5}{3}$,

$\because y_1>y_2$,

$\therefore 1-(3n-4)<5n+6-1$,解得 $n>0$,

$\therefore 0<n<\dfrac{5}{3}$;

当点 N 在对称轴直线 $x=1$ 的左侧,点 M 在对称轴直线 $x=1$ 的右侧时,

由题意得$\begin{cases}3n-4>1\\5n+6<1\end{cases}$,

$\therefore$ 该不等式组无解.

综上所述,$0<n<\frac{5}{3}$.

4. 解:(1)将 $A(-1,0)$ 和 $C(2,2)$ 代入 $y=ax^2+\frac{4}{3}x+c$ 得$\begin{cases}a-\frac{4}{3}+c=0\\4a+\frac{8}{3}+c=2\end{cases}$,解得$\begin{cases}a=-\frac{2}{3}\\c=2\end{cases}$,

$\therefore a=-\frac{2}{3},c=2$;

(2)由(1)可知抛物线的解析式为 $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2$,

令 $y=0$,则$-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2=0$,解得 $x_1=-1,x_2=3$,

$\therefore B(3,0)$,

结合函数图象可得:当 $y<0$ 时,自变量 x 的取值范围为 $x<-1$ 或 $x>3$;

(3)$\because y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+2=-\frac{2}{3}(x-1)^2+\frac{8}{3}$,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为$\left(1,\dfrac{8}{3}\right)$,对称轴为直线 $x=1$,

$\because -2<x<2$,且$-\dfrac{2}{3}<0$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时,$y=-\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{4}{3}x+2$ 取得最大值,最大值是$\dfrac{8}{3}$,

$\because$ 当 $x=-2$ 时,$y=-\dfrac{10}{3}$;当 $x=2$ 时,$y=2$;

$\therefore -\dfrac{10}{3}<y_P\leqslant\dfrac{8}{3}$.

5. (1)**证明:**$\because CF\perp CP$,四边形 $ABCD$ 为矩形,

$\therefore \angle FCP=\angle BCD=90°$,$\angle FBC=\angle PDC=90°$,

$\therefore \angle FCP-\angle FCD=\angle BCD-\angle FCD$,

$\therefore \angle DCP=\angle BCF$,

$\therefore \triangle DCP\backsim\triangle BCF$;

(2)**解:**$\because DP=2$,$\tan\angle BCF=\tan\angle DCP=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore DC=6$.

设 $AC=x$,

$\because AC=AP$,

$\therefore AD=x-2$,

在 Rt$\triangle ACD$ 中,由勾股定理得$(x-2)^2+6^2=x^2$,

解得 $x=10$,

$\therefore AP=10$,$\therefore AD=BC=8$.

$\because \tan\angle BCF=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore BF=\dfrac{8}{3}$.

在 Rt$\triangle BCF$ 中,$CF=\sqrt{BF^2+BC^2}=\sqrt{(\dfrac{8}{3})^2+8^2}$

$=\dfrac{8\sqrt{10}}{3}$;

(3)**解:**如解图,在 CF 上截取 $NG=FN$,连接 BG,

则 $CF-CG=2FN$,

由(1)可知,$\angle BCF=\angle DCP$,

在$\triangle BCF$ 和$\triangle DCP$ 中,$\begin{cases}\angle FBC=\angle PDC\\ BC=DC\\ \angle BCF=\angle DCP\end{cases}$,

$\therefore \triangle BCF\cong\triangle DCP$(ASA),

$\therefore CF=CP$.

$\because CP-BM=2FN$,

$\therefore CG=BM$.

$\because \angle ABC=90^\circ, BM\perp CF$,

$\therefore \angle ABM=\angle BCG, \angle BFG=\angle CBM$,

在$\triangle ABM$和$\triangle BCG$中，$\begin{cases}AB=BC\\ \angle ABM=\angle BCG,\\ BM=CG\end{cases}$

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle BCG(\mathrm{SAS})$,

$\therefore \angle AMB=\angle BGC$,

$\therefore \angle BMC=\angle BGF$.

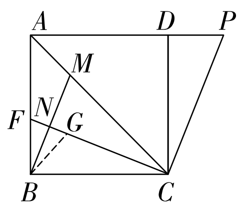
$\because GN=FN, BM\perp CF$,

$\therefore BF=BG$,

$\therefore \angle BFG=\angle BGF$,

$\therefore \angle BMC=\angle CBM$,

$\therefore BC=MC=5$.



第 5 题解图

6. (1)**证明**：$\because$ 四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore \angle ABC=90^\circ, AB=BC$,

$\therefore\ \angle ABE+\angle CBF=90°.$

$\because\ AE\perp BH, CF\perp BH,$

$\therefore\ \angle AEB=\angle BFC=90°,$

$\therefore\ \angle CBF+\angle BCF=90°,$

$\therefore\ \angle ABE=\angle BCF.$

在$\triangle ABE$和$\triangle BCF$中，$\begin{cases}\angle AEB=\angle BFC,\\ \angle ABE=\angle BCF,\\ AB=BC,\end{cases}$

$\therefore\ \triangle ABE\cong\triangle BCF$(AAS)；

(2)①**证明：**如解图，过点D作$DM\perp AE$于点M，则$\angle AMD=\angle DME=90°,$

$\because\ DG\perp BH,$

$\therefore\ \angle DGE=90°.$

$\because\ \angle AEG=90°,$

$\therefore$ 四边形$MEGD$是矩形，

$\therefore\ DG=ME.$

$\because$ 四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore\ AD=BA, \angle BAD=90°,$

$\therefore\ \angle BAE+\angle EAD=90°,$

$\because\ \angle EAD+\angle ADM=90°,$

$\therefore\ \angle BAE=\angle ADM.$

$\because\ \angle AEB=\angle DMA=90°,$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAM$，$\therefore BE=AM$.

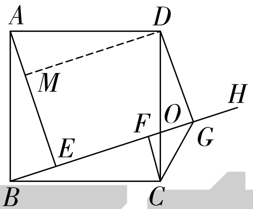
$\because \triangle ABE \cong \triangle BCF$，

$\therefore BE=CF$，

$\therefore AM=CF$.

$\because AM+ME=AE$，

$\therefore CF+DG=AE$；



第 6 题解图

②**解：**如解图，$\because$ 四边形 $MEGD$ 是矩形，

$\therefore DM=EG$.

$\because \triangle ABE \cong \triangle DAM \cong \triangle BCF$，

$\therefore DM=BF$，$\therefore BF=EG$.

$\therefore BF-EF=EG-EF$，即 $BE=FG$.

$\because BE=CF$，$\therefore CF=FG$.

$\because \angle CFG=90°$，$\therefore CG^2=CF^2+FG^2=2CF^2$，

$\therefore CG=\sqrt{2}CF$.

$\therefore \triangle CFG$ 为等腰直角三角形.

$\because \angle DGO=\angle CFO=90°$，$\angle DOG=\angle COF$，

$\therefore \triangle DOG \backsim \triangle COF$，

$\therefore \dfrac{DG}{CF}=\dfrac{DO}{CO}=\dfrac{OG}{OF}=2.$

设 $OF=x$,则 $OG=2x$,

$\therefore FG=CF=3x, DG=2CF=6x.$

$\because CD=AB=4, \dfrac{DO}{CO}=2,$

$\therefore DO=\dfrac{8}{3},$

在 $\mathrm{Rt}\triangle DOG$ 中,由勾股定理得,

$(\dfrac{8}{3})^2=(2x)^2+(6x)^2$,解得 $x=\dfrac{2\sqrt{10}}{15}$(负值已舍去),

$\therefore CF=3\times\dfrac{2\sqrt{10}}{15}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5},$

$\therefore \triangle CFG$ 的面积$=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{2\sqrt{10}}{5})^2=\dfrac{4}{5}.$