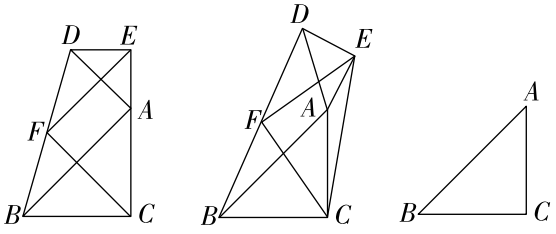
重难题一　以三角形、四边形为背景的几何类比探究题

1. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，$\angle ACB=\angle AED=90^\circ$，连接 BD，点 F 为 BD 的中点，连接 CF，EF.

(1)如图①，当点 E 在 CA 的延长线上时，线段 CF 与 EF 的数量关系为_____，$\angle CFE$ 的度数为_____；

(2)将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转，连接 CE，(1)中的两个结论是否仍然成立？如果成立，请仅就图②的情况加以证明；如果不成立，请说明理由；

(3)若 $AB=13$，$AE=5$，将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转过程中，当 D，E，F 共线时，请直接写出 $\triangle BCE$ 的面积.



图①　　图②　　备用图

第 1 题图

2. 如图,在等腰$\triangle ABC$中,$AB=BC$,设$\angle B=\alpha$,D,E分别是边AB,BC上的点,且$AD=CE$,连接CD,AE,点M,P分别是AE,AC的中点,连接PM,将PM绕点P逆时针旋转α刚好交CD于点N,连接MN.

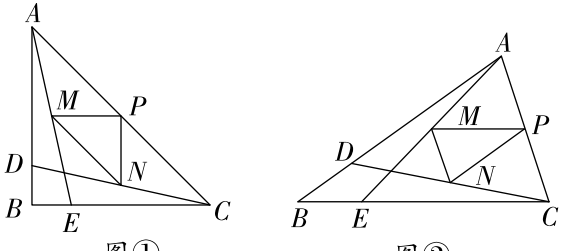
(1)如图①,当$\alpha=90°$时,

①求证:$DN=CN$;

②猜想MN与CE的数量关系为_____;

(2)当$0°<\alpha<180°$时,请用含α的式子表示出$\frac{MN}{CE}$的值并证明;

(3)如图②,若$AC=2$,$\alpha=36°$,点D,E分别是射线AB,CB上的动点,当$BD=1$时,请直接写出MN的长.



图①　　图②

第 2 题图

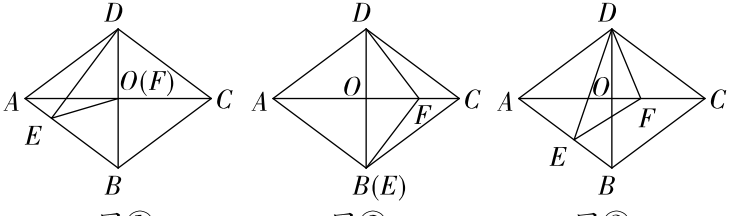
3. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线交于点 O，$AC=8$，$BD=6$，点 E、F 分别是直线 AB、AC 上的动点，且 $\angle EDF=\frac{1}{2}\angle BAD$，连接 EF.

(1)如图①，当点 F 和点 O 重合时，$\frac{DE}{DF}=$_____；

如图②，当点 E 与点 B 重合时，$\frac{DE}{DF}=$_____；

(2)如图③，根据(1)中的结论，当点 E 为直线 AB 上任意一点时，猜想$\frac{DE}{DF}$的值是否为定值，若是定值，就图③的情况进行证明；若不是定值，请说明理由；

(3)若 DF 的长为$\frac{13}{4}$，直接写出 BE 的长度.



图①　　图②　　图③

第 3 题图

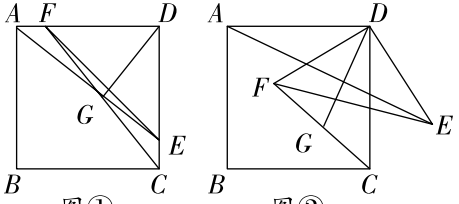
4. 如图,在正方形 $ABCD$ 中,等腰 $Rt\triangle DEF$ 的顶点 D 与正方形的顶点重合,连接 AE,CF,点 G 是 CF 的中点,连接 DG.

(1)如图①,当点 E 在 CD 上时,填空:

①AE 与 DG 的数量关系是_____,②AE 与 DG 的位置关系是_____;

(2)如图②,将$\triangle DEF$ 绕点 D 在平面内旋转,AE 与 DG 的数量关系和位置关系是否仍成立,若成立,请证明,若不成立,请说明理由;

(3)把$\triangle DEF$ 绕点 D 在平面内旋转,若 $AD=5$,$DE=4$,当$\triangle DFG$ 是直角三角形时,请直接写出 AE 的长.

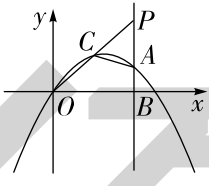


图①　　图②

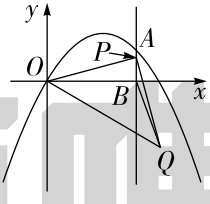
第 4 题图

重难题二　二次函数综合题

1. 如图①，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-\frac{2}{3}x(x-a)$ 过点 $A(2,\frac{2}{3})$. 过点 A 作 $AB\perp x$ 轴于点 B. 点 P 是直线 AB 上一动点，连接 OP 交抛物线于点 C，连接 CA.



图①



图②

第 1 题图

(1)求抛物线的解析式；

(2)当 $\angle POB=45°$ 时，求 $\triangle APC$ 的面积；

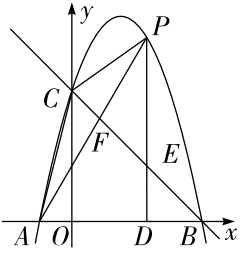
(3)如图②，以 OP 为边向下作等腰直角三角形 OPQ，$\angle OPQ=90°$，当点 P 运动到某一位置时，连接 BQ，使得 $\triangle OBQ$ 的周长最小，求此时 $\triangle OBQ$ 周长的最小值.

2. 如图,抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8$ 与 x 轴交于 A,B 两点(点 A 在点 B 的左侧),与 y 轴交于点 C,P 是抛物线上的一个动点,设点 P 的横坐标为 p($2<p<8$),过点 P 作 $PD/\!/y$ 轴交 x 轴于点 D,交直线 BC 于点 E,连接 PA,PC,AC,PA 与直线 BC 交于点 F.

(1)求 A,B,C 三点的坐标及直线 BC 的解析式;

(2)当 $S_{\triangle PCF}=\frac{3}{5}S_{\triangle ACF}$ 时,求点 P 的坐标;

(3)在(2)的条件下,若点 M 是抛物线上一动点(对称轴右侧),点 N 是 x 轴上一动点,试判断是否存在这样的点 N,使得以 B,E,M,N 为顶点的四边形是平行四边形. 若存在,请直接写出点 N 的坐标;若不存在,请说明理由.



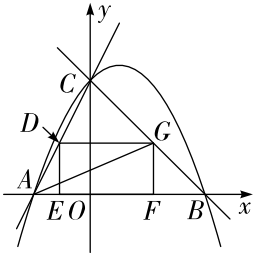
第 2 题图

3. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,抛物线 $y=ax^2+bx+4$ 与 x 轴交于 $A(-2,0)$,$B(4,0)$两点,与 y 轴交于点 C.

(1)求该抛物线的解析式并直接写出直线 AC,BC 的解析式;

(2)若矩形 $DEFG$ 的顶点 D,G 分别在线段 AC,BC 上,顶点 E,F 在 x 轴上,当 $DE=\frac{2}{3}DG$ 时,求点 G 的坐标;

(3)在(2)的条件下,连接 AG,试探究在抛物线上是否存在点 P,使得 $\angle AGP=45°$. 若存在,请直接写出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.



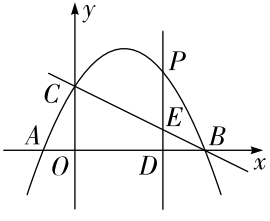
第 3 题图

4. 如图,抛物线 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 与 x 轴交于 A,B 两点(点 A 在点 B 的左侧),与 y 轴交于点 C,直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 经过 B,C 两点,点 P 是第一象限抛物线上一动点,过点 P 作 $PD\perp x$ 轴于点 D,交 BC 于点 E.

(1)求抛物线的解析式;

(2)设点 P 的横坐标为 m,当 $PE=2DE$ 时,求 m 的值;

(3)在(2)的条件下,直线 PD 上是否存在一点 Q,使得以 B,C,Q 为顶点的三角形是直角三角形. 若存在,直接写出点 Q 的坐标;若不存在,请说明理由.

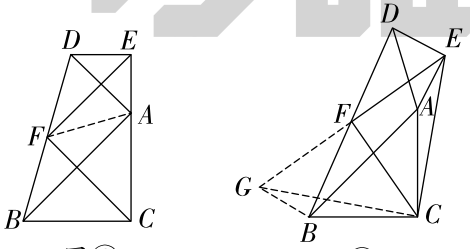


第 4 题图

重难题一　以三角形、四边形为背景的几何类比探究题

1. 解：(1) $EF=CF$，$90°$；

【解法提示】如解图①，连接 AF，$\because$ $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，$\therefore$ $\angle DEA=\angle BCA=90°$，$AE=DE$，$AC=BC$，$\therefore$ $\angle DAB=90°$，$\because$ 点 F 为 BD 的中点，$\therefore$ $AF=DF=BF$，$\therefore$ $\triangle AEF\cong\triangle DEF$（SSS），$\therefore$ $\angle AEF=\angle DEF$，$\because$ $\angle AED=90°$，$\therefore$ $\angle AEF=45°$，同理可得 $\angle ACF=45°$，$\therefore$ $\angle AEF=\angle ACF=45°$，$\therefore$ $EF=CF$，$\angle CFE=90°$.



第 1 题解图

(2) 两个结论仍然成立.

证明：$\because$ $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，$\therefore$ $\angle ABC=\angle BAC=\angle ADE=\angle DAE=45°$，$AE=DE$，$AC=BC$.

如解图②，过点 B 作 $BG/\!/DE$ 交 EF 的延长线于

点 G,连接 CG,

$\because BG/\!/DE$,

$\therefore \angle EDF=\angle GBF$.

$\because \angle DFE=\angle BFG, BF=DF$,

$\therefore \triangle BFG\cong\triangle DFE$(ASA),

$\therefore BG=DE, FG=EF$,

$\therefore BG=AE$.

$\because \angle EDF=\angle GBF$,

$$\begin{aligned}\therefore \angle CBG &= \angle GBF+\angle CBD\\ &= \angle EDF+\angle CBD\\ &= \angle ABD+\angle ADB+\angle ABC+\angle ADE\\ &= 180^\circ-\angle BAD+45^\circ+45^\circ\\ &= 270^\circ-\angle BAD\\ &= \angle EAC.\end{aligned}$$

在$\triangle BGC$和$\triangle AEC$中,

$$\begin{cases}BG=AE,\\ \angle CBG=\angle CAE,\\ BC=AC,\end{cases}$$

$\therefore \triangle BGC\cong\triangle AEC$(SAS),

$\therefore GC=EC, \angle BCG=\angle ACE$.

$\because \angle ACB=\angle BCG+\angle ACG=90^\circ$,

$\therefore \angle ACE+\angle ACG=\angle GCE=90^\circ$,

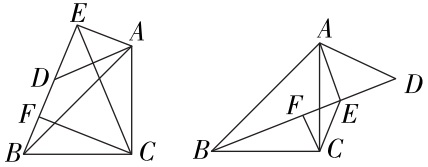
$\therefore \triangle ECG$ 是等腰直角三角形.

又$\because FG=EF$,

$\therefore EF=CF$, $\angle CFE$ 的度数为 $90°$;

(3)51 或 21.

【解法提示】①如解图③,在$\triangle ABE$ 中,$\angle AEB=90°$,$AB=13$,$AE=5$,由勾股定理得 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$,$\therefore BD=BE-DE=12-5=7$,$\because$ 点 F 是 BD 的中点,$\therefore DF=\frac{7}{2}$,$\therefore EF=CF=5+\frac{7}{2}=\frac{17}{2}$,$\therefore S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}BE\cdot CF=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{17}{2}=51$,②如解图④,同理可得 $S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}BE\cdot CF=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{7}{2}=21$. 综上所述,$\triangle BCE$ 的面积为 51 或 21.



图③　　图④

第 1 题解图

2. (1)①证明:$\because \angle B=\alpha=\angle MPN=90°$,$AB=BC$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle BAC=\angle ACB=45°$.

$\because$ 点 M,P 分别是 AE,AC 的中点，

$\therefore MP/\!/CE$，

$\therefore \angle APM=\angle ACB=45°$，

$\therefore \angle NPC=180°-\angle APM-\angle MPN=180°-45°-90°=45°$，$\therefore PN/\!/AD$.

$\because P$ 为 AC 的中点，$\therefore N$ 为 CD 的中点，

$\therefore DN=CN$；

②解：$MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CE$；

【解法提示】$\because$ 点 M,P 分别是 AE,AC 的中点，

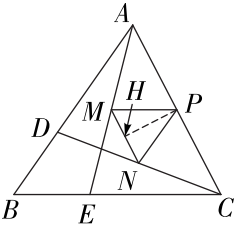
$\therefore MP/\!/CE$，$MP=\dfrac{1}{2}CE$，$\because MP=PN$，$\alpha=90°$，

$\therefore \triangle MPN$ 为等腰直角三角形，$\therefore MN=\sqrt{2}MP$，

$\therefore MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CE$.

(2)解：$\dfrac{MN}{CE}=\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

证明：如解图①，过点 P 作 $PH\perp MN$ 于点 H，



第 2 题解图①

$\because PN=PM$,

$\therefore \triangle PMN$ 是等腰三角形,

$\therefore NH=MH, \angle NPH=\angle MPH=\dfrac{\alpha}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle MHP$ 中, $\dfrac{MH}{PM}=\sin\dfrac{\alpha}{2}$,

$\therefore \dfrac{MN}{PM}=\dfrac{2MH}{PM}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

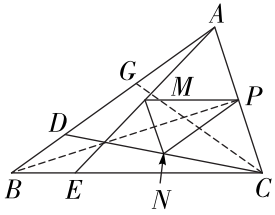
又 $\because \dfrac{PM}{CE}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore \dfrac{MN}{CE}=\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

(3)解: MN 的长为 $\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}$ 或 $\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$.

【解法提示】$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=BC$, $\angle ABC=36°$, 则 $\angle BCA=\angle BAC=72°$, 如解图②, 作 $\angle BCA$ 的平分线 CG, 交 AB 于点 G, 则 $\angle BCG=\angle ACG=\angle ABC=36°$, $\therefore \angle CGA=72°$, $\therefore CG=CA=BG=2$, $\triangle ABC\backsim\triangle ACG$, $\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{AG}$. 设 $AG=x$, 则 $AB=2+x$, $\therefore \dfrac{2+x}{2}=\dfrac{2}{x}$, 解得 $x=\sqrt{5}-1$ 或 $x=-\sqrt{5}-1$(舍去), $\therefore BC=AB=\sqrt{5}-1+2=\sqrt{5}+1$. 连接 BP, $\because P$ 为 AC 的中点, $\therefore BP\perp AC$, $CP=AP=$

1，$\angle ABP=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{\alpha}{2}$，$\therefore \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{AP}{AB}=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. 由(2)可得$\frac{MN}{CE}=\sin\frac{\alpha}{2}$，$\therefore MN=CE\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

$\because BC=\sqrt{5}+1$，$AD=CE$，$\therefore BE=BD=1$，$\therefore$ 分以下两种情况讨论：①当点 D 在线段 AB 上，点 E 在线段 CB 上时，$CE=BC-BE=\sqrt{5}$，则 $MN=\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{5-\sqrt{5}}{4}$；②当点 D 在 AB 的延长线上，点 E 在 CB 的延长线上时，$CE=BC+BE=\sqrt{5}+2$，则 $MN=(\sqrt{5}+2)\times\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$. 综上所述，$MN$ 的长为$\frac{5-\sqrt{5}}{4}$或$\frac{3+\sqrt{5}}{4}$.



第 2 题解图②

3. 解:(1)$\frac{8}{5}$,$\frac{8}{5}$;

【解法提示】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore AC\perp BD$,$\angle BAC=\angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAD$,$\angle DAC=\angle DCA$,

$\because \angle EDF=\frac{1}{2}\angle BAD$,$\therefore \angle EDF=\angle BAC=\angle DAC$.

$\because AC=8$,$BD=6$,$\therefore AO=CO=4$,$BO=DO=3$,$\therefore AD=5$,①当点 F 和点 O 重合时,$\because \angle BAO+\angle ABO=90°$,$\therefore \angle EDB+\angle ABO=90°$,$\therefore \angle DEB=90°$,$\because OD=OB$,$BD=6$,$\therefore OE=OD=\frac{1}{2}BD=3$,

$\therefore \angle FDE=\angle FED$,$\because \angle EDF=\angle BAC=\angle DCA$,

$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle ACD$,$\therefore \frac{DE}{AC}=\frac{DF}{AD}$,即$\frac{DE}{DF}=\frac{AC}{AD}=\frac{8}{5}$;

②当点 E 和点 B 重合时,由菱形的对称性可得,$DF=EF$,$\therefore \angle FDE=\angle FED$,同①可证$\triangle DEF\backsim\triangle ACD$,$\therefore \frac{DE}{DF}=\frac{AC}{AD}=\frac{8}{5}$.

(2)$\frac{DE}{DF}$的值为定值$\frac{8}{5}$.

理由如下:如解图①,

在 OC 上取点 H，连接 BH，DH，使得 $\angle BDH=\angle EDF$，则 $\angle EDB=\angle FDH$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore \angle BAC=\angle DAC=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle BAD$，$DH=BH$.

$\because \angle EDF=\frac{1}{2}\angle BAD$，

$\therefore \angle EDF=\angle BAC=\angle BDH=\angle DAC=\angle ACD$.

$\because \angle AOB=\angle DOH$，

$\therefore \angle ABO=\angle DHO$，

即 $\angle EBD=\angle FHD$.

$\because \angle EDB=\angle FDH$，

$\therefore \triangle EDB\backsim\triangle FDH$，

$\therefore \frac{DE}{DF}=\frac{DB}{DH}$.

$\because DH=BH$，

$\therefore \angle BDH=\angle DBH$.

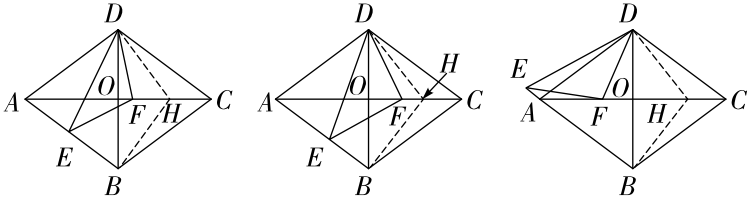
又 $\because \angle BDH=\angle EDF=\angle DAC=\angle ACD$，

$\therefore \triangle DBH\backsim\triangle ACD$，

$\therefore \frac{DB}{AC}=\frac{DH}{AD}$，

即 $\frac{DB}{DH}=\frac{AC}{AD}=\frac{8}{5}$，

$\therefore \dfrac{DE}{DF}=\dfrac{8}{5}$;



图①　　图②　　图③

第 3 题解图

(3) $\dfrac{8}{5}$或$\dfrac{28}{5}$.

【解法提示】①如解图②,当点 F 在线段 OC 上时,由 $\triangle ODH \backsim \triangle OAB$ 可得,$\dfrac{OH}{OB}=\dfrac{DH}{AB}=\dfrac{OD}{OA}$,即 $\dfrac{OH}{3}=\dfrac{DH}{5}=\dfrac{3}{4}$,$\therefore OH=\dfrac{9}{4}$,$DH=\dfrac{15}{4}$,在 Rt$\triangle DOF$ 中,$\because DF=\dfrac{13}{4}$,$DO=3$,$\therefore OF=\dfrac{5}{4}$,$\therefore FH=\dfrac{9}{4}-\dfrac{5}{4}=1$,由(2)可知,$\triangle EDB \backsim \triangle FDH$,$\therefore \dfrac{BE}{HF}=\dfrac{DB}{DH}$,即 $\dfrac{BE}{1}=\dfrac{6}{\frac{15}{4}}$,$\therefore BE=\dfrac{8}{5}$;②如解图③,当点 F 在线段 OA 上时,同①可得,$OH=\dfrac{9}{4}$,$DH=\dfrac{15}{4}$,$OF=\dfrac{5}{4}$,$\therefore$

$FH=\frac{9}{4}+\frac{5}{4}=\frac{7}{2}$，由$\triangle EDB\backsim\triangle FDH$，得$\frac{BE}{HF}=\frac{DB}{DH}$，

即$\frac{BE}{\frac{7}{2}}=\frac{6}{\frac{15}{4}}$，$\therefore BE=\frac{28}{5}$.

4. 解：(1)$AE=2DG$，$AE\perp DG$；

【解法提示】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore CD=AD$，$\angle ADC=90°$，$\because\triangle DEF$ 是等腰直角三角形，$\therefore DE=DF$，$\angle EDF=90°$，$\therefore\angle ADC=\angle EDF=90°$，在$\triangle ADE$ 和$\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADE=\angle CDF,\\ DE=DF,\end{cases}$ $\therefore\triangle ADE\cong\triangle CDF$(SAS)，$\therefore AE=CF$，$\angle DAE=\angle DCF$，$\because$ 点 G 是 CF 的中点，$\therefore CF=2DG$，$DG=FG$，$\therefore AE=2DG$，$\angle GDF=\angle DFG$，$\because\angle DFG+\angle DCF=90°$，$\therefore\angle GDF+\angle DAE=90°$，$\therefore AE\perp DG$.

(2)AE 与 DG 的数量关系和位置关系仍成立.

证明：如解图①，延长 DG 到点 H，使得 $GH=DG$，连接 CH，

$\because$ 点 G 是 CF 的中点，

$\therefore FG=CG$.

又$\because \angle DGF=\angle HGC$,

$\therefore \triangle DFG\cong\triangle HCG$(SAS),

$\therefore DF=HC$,

$\angle FDG=\angle CHG$,

$\therefore DF/\!/CH$,

$\therefore \angle FDC+\angle DCH=180°$.

$\because \angle ADE+\angle CDF=\angle ADC+\angle CDE+\angle CDF$

$=\angle ADC+\angle EDF$

$=180°$,

$\therefore \angle ADE=\angle DCH$.

$\because DF=HC, DF=DE$,

$\therefore HC=DE$.

在$\triangle DCH$和$\triangle ADE$中,

$$\begin{cases} HC=ED, \\ \angle DCH=\angle ADE, \\ CD=DA, \end{cases}$$

$\therefore \triangle DCH\cong\triangle ADE$(SAS),

$\therefore DH=AE$,

$\angle CDH=\angle DAE$,

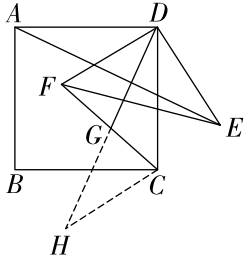
$\therefore AE=2DG$.

$\because \angle ADG+\angle CDG=90°$,

$\therefore \angle ADG+\angle DAE=90°$,

万唯中考

$\therefore AE \perp DG$;

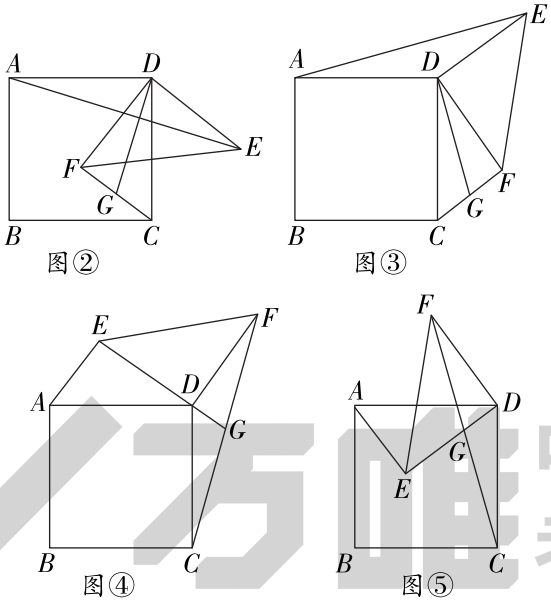


第 4 题解图①

(3)$\sqrt{73}$或 3.

【解法提示】当$\triangle DFG$是直角三角形时,分三种情况进行讨论:①当$\angle DFG=90°$时,如解图②,由勾股定理,得$CF=\sqrt{CD^2-DF^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$,$\therefore FG=\frac{1}{2}CF=\frac{3}{2}$,$\therefore DG=\sqrt{FG^2+DF^2}=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+4^2}=\frac{\sqrt{73}}{2}$,由(2)知:$AE=2DG$,$\therefore AE=2DG=\sqrt{73}$;如解图③,同理可得$AE=\sqrt{73}$;②当$\angle FDG=90°$时,如解图④,则$E$,$D$,$G$三点共线,由(2)知:$AE\perp DG$,$\therefore AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$;如解图⑤,同理可得$AE=3$;③当$\angle DGF=90°$时,则$DG\perp CF$,$\because$点$G$是$CF$的中点,$\therefore \triangle CDF$是等腰三角形,且$DC=DF$,与题设条件矛盾,$\therefore$此种情况不存在,综上所述,当$\triangle DFG$是直角三角形

时，AE 的长为$\sqrt{73}$或 3.



第 4 题解图

重难题二　二次函数综合题

1. 解:(1)∵ 抛物线 $y=-\frac{2}{3}x(x-a)$ 过点 $A(2,\frac{2}{3})$,

∴ $-\frac{2}{3}\times2\times(2-a)=\frac{2}{3}$,解得 $a=\frac{5}{2}$,

∴ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{2}{3}x(x-\frac{5}{2})=-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x$;

(2)如解图①,过点 C 作 $CH\perp OB$ 于点 H,

∵ $\angle COB=45°$,

∴ $OH=CH$,$OB=PB=2$,

设 $OH=CH=m$,将点 $C(m,m)$ 代入抛物线解析式中,

∴ $m=-\frac{2}{3}m^2+\frac{5}{3}m$,

解得 $m_1=1$,$m_2=0$(舍去),

∴ $OH=1$,$HB=OB-OH=2-1=1$,

∴ $PA=PB-AB=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$,

∴ $S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\times PA\cdot HB=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times1=\frac{2}{3}$;

(3)如解图②,在直线 AB 上取一点 F,使 $BF=OB$,连接 FQ,OF,

$\because \angle POQ=\angle BOF=45°$,

$\therefore \angle POB=\angle QOF$,

$\because \cos45°=\dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{OB}{OF}$,

$\therefore \dfrac{OP}{OB}=\dfrac{OQ}{OF}$,

$\therefore \triangle POB\backsim\triangle QOF$,

$\therefore \angle OBP=\angle OFQ=90°$,

$\therefore \angle BFQ=90°-\angle OFB=45°$,

作点 B 关于 FQ 的对称点 N,连接 QN,ON,FN.

则 $\angle QFN=\angle BFQ=45°$,

$OQ+BQ=OQ+QN\geqslant ON$,

$\therefore \angle BFN=90°$,

设 BF 交 ON 于点 M,

$\because OB=BF=FN$,$\angle OMB=\angle NMF$,

$\therefore \triangle OBM\cong\triangle NFM$(AAS),

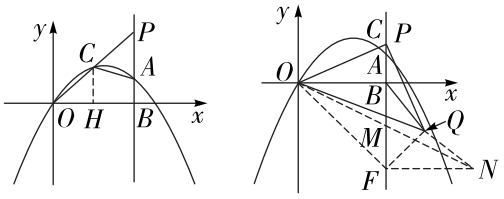
$\therefore OM=MN$,$BM=MF=1$,

$\therefore OM=MN=\sqrt{5}$,

$\therefore ON=2\sqrt{5}$,

$\therefore OQ+BQ$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$,

$\therefore$ $\triangle OBQ$ 周长的最小值为 $2+2\sqrt{5}$.



图①　　图②

第 1 题解图

2. 解:(1)令 $-\frac{1}{2}x^2+3x+8=0$,解得 $x=-2$ 或 $x=8$,

$\because$ 点 A 在点 B 的左侧,

$\therefore A(-2,0)$,$B(8,0)$,

令 $x=0$,则 $y=8$,

$\therefore C(0,8)$,

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$,把 B,C 两点的坐标分别代入,

得 $\begin{cases}8k+b=0,\\b=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=8,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-x+8$;

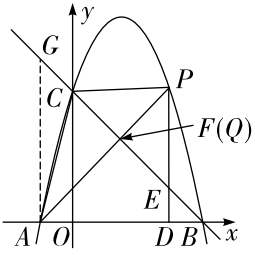
(2)如解图①,过点 C 作 $CQ\perp AP$ 于点 Q,

$\because S_{\triangle PCF}=\frac{1}{2}PF\cdot CQ$,$S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}AF\cdot CQ$,

$\therefore \frac{S_{\triangle PCF}}{S_{\triangle ACF}}=\frac{PF}{AF}$.

$\because S_{\triangle PCF}=\frac{3}{5}S_{\triangle ACF}$,

$\therefore \frac{PF}{AF}=\frac{3}{5}$.



第 2 题解图①

过点 A 作 y 轴的平行线交直线 BC 于点 G,

当 $x=-2$ 时, $y=-(-2)+8=10$,

$\therefore AG=10$.

$\because AG/\!/y$ 轴$/\!/PD$,

$\therefore \frac{PE}{AG}=\frac{PF}{AF}=\frac{3}{5}$, $\therefore PE=6$.

$\because P(p,-\frac{1}{2}p^2+3p+8)$, $E(p,-p+8)$,

$\therefore PE=y_P-y_E=-\frac{1}{2}p^2+3p+8-(-p+8)=-\frac{1}{2}p^2+4p$,

$\therefore -\frac{1}{2}p^2+4p=6$,

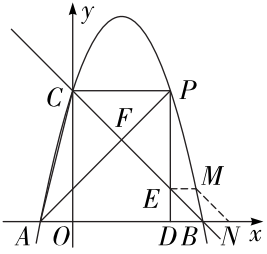
解得 $p=2$(舍去)或 $p=6$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为(6,8);

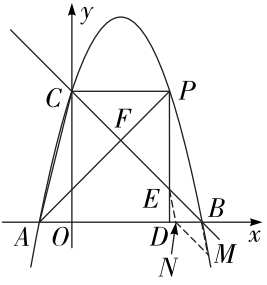
(3)存在,点 N 的坐标为($5+\sqrt{21}$,0)或($1+\sqrt{29}$,0)或($11-\sqrt{21}$,0).

【解法提示】由(2)可知 $P(6,8)$,$\therefore$ 将 $x=6$ 代入直线 BC 的解析式可得,$E(6,2)$,设 $M(m,-\frac{1}{2}m^2+3m+8)(m>3)$,$N(n,0)$. 分三种情况讨论:①当以 BE 为边,BM 为对角线时,如解图②,$EM/\!/BN$,$\therefore -\frac{1}{2}m^2+3m+8=2$,解得 $m_1=3+\sqrt{21}$,$m_2=3-\sqrt{21}$(舍去),由中点坐标公式得 $3+\sqrt{21}+8=6+n$,解得 $n=5+\sqrt{21}$,$\therefore N(5+\sqrt{21},0)$;②当以 BE 为边,EM 为对角线时,如解图③,由中点坐标公式得 $-\frac{1}{2}m^2+3m+8+2=0$,解得 $m_3=3+\sqrt{29}$,$m_4=3-\sqrt{29}$(舍去),由中点坐标公式得 $3+\sqrt{29}+6=8+n$,解得 $n=1+\sqrt{29}$,$\therefore N(1+\sqrt{29},0)$;③当以 BE 为对角线时,如解图④,此时 $EM/\!/BN$,$\therefore -\frac{1}{2}m^2+3m+8=2$,解得 $m_5=3+\sqrt{21}$(负值已舍去),由中点坐标公式得 $n+3+\sqrt{21}=6+$

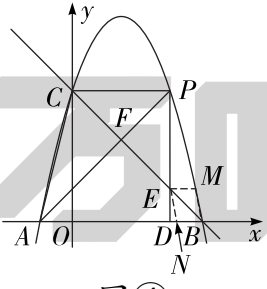
8，∴ $n=11-\sqrt{21}$，∴ $N(11-\sqrt{21},0)$.



图②



图③



图④

第 2 题解图

综上所述，满足条件的点 N 的坐标为 $(5+\sqrt{21},0)$ 或 $(1+\sqrt{29},0)$ 或 $(11-\sqrt{21},0)$.

3. 解：(1) 将点 $A(-2,0)$，$B(4,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+4$ 中，

得 $\begin{cases}4a-2b+4=0,\\16a+4b+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\b=1,\end{cases}$

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$,

当 $x=0$ 时,$y=4$,

$\therefore C(0,4)$,

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y=2x+4$,

直线 BC 的解析式为 $y=-x+4$;

(2)设点 D 的纵坐标为 m,则点 $D(\frac{m-4}{2},m)$,

$\because$ 四边形 $DEFG$ 是矩形,

$\therefore DG/\!/EF$,$\therefore G(4-m,m)$,

$\therefore DE=m$,$DG=4-m-\frac{m-4}{2}=6-\frac{3}{2}m$.

$\because DE=\frac{2}{3}DG$,

$\therefore m=\frac{2}{3}\times(6-\frac{3}{2}m)$,

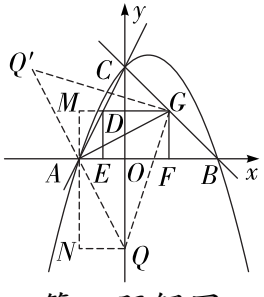
解得 $m=2$,

$\therefore$ 点 G 的坐标为$(2,2)$;

(3)存在,点 P 的坐标为$(-2-2\sqrt{5},-10-6\sqrt{5})$或$(\frac{4-2\sqrt{10}}{3},\frac{20+2\sqrt{10}}{9})$.

【解法提示】①当点 P 在 AG 下方时,如解图,将 AG 绕点 A 按顺时针旋转 $90°$,得到 AQ,连接

GQ,过点 A 作 $MN/\!/y$ 轴,与 GD 的延长线交于点 M,过点 Q 作 $QN\perp MN$ 于点 N,易证 $\triangle AMG\cong\triangle QNA$,$\therefore MG=NA=4$,$MA=NQ=2$,$\therefore Q(0,-4)$,$\therefore$ 直线 GQ 的解析式为 $y=3x-4$. 令 $3x-4=-\frac{1}{2}x^2+x+4$,解得 $x_1=-2+2\sqrt{5}$(舍去),$x_2=-2-2\sqrt{5}$,$\therefore P(-2-2\sqrt{5},-10-6\sqrt{5})$;②当点 P 在 AG 上方时,如解图,易知点 Q,Q' 关于直线 AG 对称,根据对称性可得 $Q'(-4,4)$,$\therefore$ 直线 GQ' 的解析式为 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$,联立 $-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}=-\frac{1}{2}x^2+x+4$,解得 $x_1=\frac{4+2\sqrt{10}}{3}$(舍去),$x_2=\frac{4-2\sqrt{10}}{3}$,$\therefore P(\frac{4-2\sqrt{10}}{3},\frac{20+2\sqrt{10}}{9})$,综上所述,满足条件的点 P 的坐标为 $(-2-2\sqrt{5},-10-6\sqrt{5})$ 或 $(\frac{4-2\sqrt{10}}{3},\frac{20+2\sqrt{10}}{9})$.



第 3 题解图

4. 解:(1)在 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 中,令 $x=0$,则 $y=2$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0,2)$,

令 $y=0$,则$-\frac{1}{2}x+2=0$,

解得 $x=4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为$(4,0)$.

将点 $B(4,0)$,$C(0,2)$代入 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 中,

得$\begin{cases}16a+6+c=0,\\c=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\c=2,\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$;

(2)$\because PD\perp x$ 轴,交直线 BC 于点 E,点 P 的横坐标为 $m(0<m<4)$,

$\therefore P(m,-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2)$,$D(m,0)$,$E(m,-\frac{1}{2}m+2)$,

$\therefore PE=-\frac{1}{2}m^2+\frac{3}{2}m+2-(-\frac{1}{2}m+2)=-\frac{1}{2}m^2+2m$,

$DE=-\frac{1}{2}m+2$.

$\because PE=2DE$,

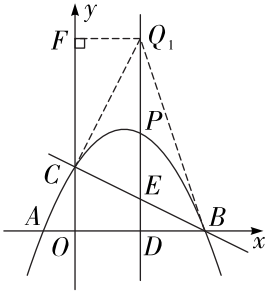
$\therefore -\frac{1}{2}m^2+2m=2(-\frac{1}{2}m+2)$,

解得 $m_1=2$,$m_2=4$(舍去),

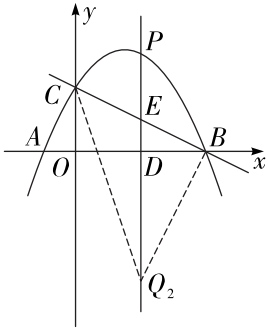
$\therefore m$ 的值为 2;

(3)存在. 点 Q 的坐标为(2,6)或(2,−4)或(2,$1+\sqrt{5}$)或(2,$1-\sqrt{5}$).

【解法提示】当 $x=2$ 时,$y=-\frac{1}{2}\times2+2=1$,$\therefore$ 点 E 的坐标为(2,1),由题易知,$OB=4$,$OC=OD=BD=2$,$BC=2\sqrt{5}$,$CE=BE=\sqrt{5}$,分情况讨论:①当点 C 是直角顶点时,如解图①,过点 C 作 $CQ_1\perp BC$,交直线 PD 于点 Q_1,过点 Q_1 作 $Q_1F\perp y$ 轴于点 F,则 $Q_1F=OD=OC=2$,易得 $\triangle CFQ_1\cong\triangle BOC$,$\therefore CF=OB=4$,$\therefore OF=OC+CF=2+4=6$,$\therefore Q_1(2,6)$;



图①



图②

第 4 题解图

②当点 B 是直角顶点时,如解图②,过点 B 作 $BQ_2\perp BC$,交直线 PD 于点 Q_2,同理易得 $\triangle Q_2DB$

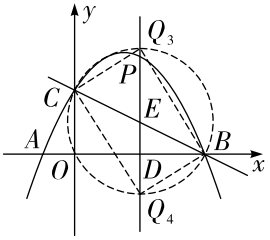
$\cong \triangle BOC$，$\therefore DQ_2=OB=4$，$\therefore Q_2(2,-4)$；③当点 Q 是直角顶点时，如解图③，以线段 BC 为直径作圆，交直线 PD 于 Q_3，Q_4 两点，

$\because \angle CQB=90°$，$BE=CE$，

$\therefore EQ=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}=\sqrt{5}$，

又$\because$ 点 E 的坐标为$(2,1)$，

$\therefore Q_3(2,1+\sqrt{5})$，$Q_4(2,1-\sqrt{5})$.



第 4 题解图③

综上所述，点 Q 的坐标为$(2,6)$或$(2,-4)$或$(2,1+\sqrt{5})$或$(2,1-\sqrt{5})$.

唯中考