数学

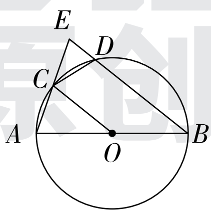
题型一　圆的综合题

1. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，C，D 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上的两动点（在 AB 同侧，不与点 A，B 重合），连接 AC，BD，延长交于点 E，且 $OC \parallel BD$.

(1) 求证：$CE=CD$；

(2) 若 $AB=12$，$AC=4$，求$\dfrac{DE}{CD}$的值；

(3) 若 $2\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，$CD=a$，求 $\odot O$ 的半径（用含 a 的式子表示）.



第 1 题图

【答案】(1) 证明：$\because$ $OC \parallel BD$，

$\therefore$ $\angle ACO=\angle E$，

$\because$ C，D 为 $\odot O$ 上的点，

$\therefore$ $\angle A+\angle BDC=180°$，

$\because$ $\angle CDE+\angle BDC=180°$，

$\therefore$ $\angle CDE=\angle A$，

$\because$ $OA=OC$，

$\therefore \angle ACO=\angle A$,

$\therefore \angle E=\angle CDE$,

$\therefore CE=CD$;

(2)**解:**如解图,连接 AD,

$\because AB$ 为$\odot O$ 的直径,

$\therefore AD\perp BE$,

$\because OC/\!/BD$,

$\therefore \dfrac{OC}{BE}=\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AO}{AB}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore BE=2OC=12$,$AE=2AC=8$,

由(1)知,$CE=CD$,

$\therefore CD=CE=AC=4$.

在 Rt$\triangle ADE$ 和 Rt$\triangle ABD$ 中,根据勾股定理得,

$AD^2=AE^2-DE^2=AB^2-BD^2$.

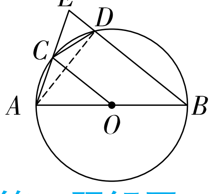
设 $DE=x$,则 $BD=12-x$,

$\therefore 8^2-x^2=12^2-(12-x)^2$,

解得 $x=\dfrac{8}{3}$,

$\therefore DE$ 的长为$\dfrac{8}{3}$,

$\therefore \dfrac{DE}{CD}=\dfrac{\frac{8}{3}}{4}=\dfrac{2}{3}$;



第 1 题解图

(3)**解：**如解图，连接 AD，

由(2)得 $\triangle AOC \backsim \triangle ABE$，

$\therefore \dfrac{OC}{BE}=\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{1}{2}$，

设 $\odot O$ 的半径为 R，即 $AB=2R$，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB=90^{\circ}$，$\angle ADE=90^{\circ}$，

$\because$ 点 O 是 AB 的中点，$OC/\!/BE$，

$\therefore OC$ 是 $\triangle ABE$ 的中位线，

$\therefore$ 点 C 是 AE 的中点，

$\therefore CD=CE=AC=a$，

$\therefore AE=2a$，

$\therefore 2\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，

$\therefore \angle DAB=60^{\circ}$，

$\therefore AD=R$，$BD=\sqrt{3}R$，

$\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore BE=2R$，

$\therefore DE=2R-\sqrt{3}R$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，由勾股定理得，

$AE^2=AD^2+DE^2$，即 $(2a)^2=R^2+(2R-\sqrt{3}R)^2$，

解得 $k=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$（负值已舍去），

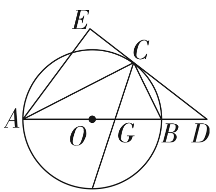
$\therefore$ $\odot O$ 的半径为$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$.

2. 如图,AB 是$\odot O$ 的直径,点 C 是圆上一点,点 D 是 AB 延长线上一点,连接 CD,$\angle BCD=\angle CAB$,过点 A 作 DC 的垂线交 DC 的延长线于点 E,点 F 是 $\overset{\frown}{AB}$ 上一动点,连接 CF 交 AB 与点 G.

(1)证明:$\triangle ABC\backsim\triangle ACE$;

(2)若 $BC=6$,$AB=10$,求 $\sin D$ 的值;

(3)当点 F 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,点 H 是 AC 的中点,连接 BH 交 CG 于点 I,连接 AI,若 $\tan\angle ABC=\dfrac{1}{2}$,$BC=a$,求$\dfrac{AI^2\cdot BI^2}{BC^2}$的值.



第 2 题图

【答案】(1)证明:如解图①,连接 OC,

$\because$ AB 是$\odot O$ 的直径,

$\therefore$ $\angle BCA=90°$,

$\therefore$ $\angle CAB+\angle ABC=90°$,

$\because OC=OB$,

$\therefore \angle OCB=\angle OBC$,

$\therefore \angle CAB+\angle OCB=90°$.

$\because \angle BCD=\angle CAB$,

$\therefore \angle OCB+\angle BCD=\angle OCD=90°$,

$\therefore \angle OCA+\angle ACE=90°$,

$\because OC=OA$,

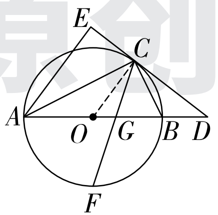
$\therefore \angle CAB=\angle OCA$,

$\therefore \angle ACE=\angle ABC$,

$\because AE\perp DE$,

$\therefore \angle E=\angle ACB=90°$,

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ACE$;



第 2 题解图①

(2)**解:**如解图①,

$\because AB=10$,AB 是$\odot O$ 的直径,$BC=6$,

$\therefore OC=5$,$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=8$.

$\because \triangle ABC\backsim\triangle ACE$,

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{AE}$,即$\dfrac{10}{8}=\dfrac{8}{AE}$,解得 $AE=\dfrac{32}{5}$,

$\because AE \perp DE, OC \perp DE$,

$\therefore \triangle OCD \backsim \triangle AED$,

$\therefore \dfrac{OC}{AE}=\dfrac{OD}{AD}$，即$\dfrac{5}{\frac{32}{5}}=\dfrac{5+BD}{10+BD}$，解得 $BD=\dfrac{90}{7}$，

$\therefore OD=\dfrac{125}{7}$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中，$\sin D=\dfrac{OC}{OD}=\dfrac{7}{25}$；

(3)**解**：如解图②，

$\because BC=a, \tan\angle ABC=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore AC=2a, AB=\sqrt{5}a$，

$\because$ 点 H 是 AC 的中点，

$\therefore AH=CH=a$，

$\because \angle ACB=90^{\circ}$，

$\therefore BH=\sqrt{2}a$，

$\because$ 点 F 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，

$\therefore CF$ 是 $\angle ACB$ 的平分线，

$\therefore \angle FCB=\angle FCA=45^{\circ}$，

$\therefore HI=BI=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，

$\therefore \frac{AH}{BH}=\frac{HI}{AH}$,

$\because \angle AHI=\angle BHA$,

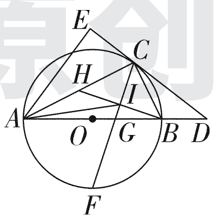
$\therefore \triangle AHI \backsim \triangle BHA$,

$\therefore \frac{AI}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because AB=\sqrt{5}a$,

$\therefore AI=\frac{\sqrt{10}}{2}a$,

$\therefore \frac{AI^2 \cdot BI^2}{BC^2}=\frac{5}{4}a^2$.



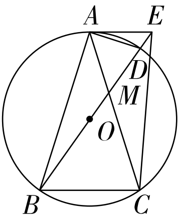
第 2 题解图②

3. 如图，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，$AB=AC$，点 E 是$\odot O$外一点，$AE /\!/ BC$，连接 BO 并延长，交 AC 于点 M，交$\odot O$ 于点 D，交 AE 于点 E，连接 AD.

(1)求证：$\triangle ADM \backsim \triangle BCM$；

(2)求$\frac{BE \cdot DE}{AE^2}$的值；

(3) 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上有一点 P(不与 A,B 重合),连接 PD 并延长 AE 与 PD 延长线交于点 F,则 $\dfrac{PF\cdot DF}{AF^2}$的值是否为定值? 并说明理由.



第 3 题图

【答案】(1) **证明**:$\because$ $\overset{\frown}{CD}$ 所对的圆周角为$\angle DAC$和$\angle DBC$,

$\therefore$ $\angle DAC=\angle DBC$,

$\because$ $\angle AMD=\angle BMC$,

$\therefore$ $\triangle ADM\backsim\triangle BCM$;

(2) **解**:如解图,过点 A 作 BC 的垂线交 BC 于点 G,

$\because$ BD 为$\odot O$ 的直径,A 为$\odot O$ 上的点,

$\therefore$ $\angle BAD=90°$,

$\therefore$ $\angle BAD=\angle GAE$,

$\therefore$ $\angle BAD-\angle GAD=\angle GAE-\angle GAD$,

$\therefore$ $\angle BAG=\angle EAD$,

又$\because$ 在$\odot O$ 中,$OA=OB$,

$\therefore \angle BAG = \angle ABO$,

$\therefore \angle EAD = \angle ABO$,

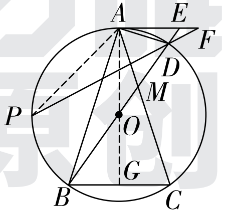
在 $\triangle AED$ 和 $\triangle BEA$ 中, $\angle AED = \angle AED$, $\angle EAD = \angle ABO$,

$\therefore \triangle AED \backsim \triangle BEA$,

$\therefore \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{DE}{AE}$,

$\therefore AE^2 = BE \cdot DE$,

$\therefore \dfrac{BE \cdot DE}{AE^2} = 1$;



第 3 题解图

(3)解:$\dfrac{PF \cdot DF}{AF^2}$为定值 1,

理由:如解图,连接 PA,则$\angle P = \angle ABO$,

又$\because \angle EAD = \angle ABO$, $\therefore \angle EAD = \angle P$,

又$\because \angle AFD = \angle PFA$,

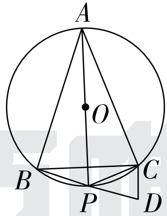
$\therefore \triangle FAD \backsim \triangle FPA$,

$\therefore \dfrac{AF}{PF} = \dfrac{DF}{AF}$,

$\therefore AF^2=PF\cdot DF$,

$\therefore \dfrac{PF\cdot DF}{AF^2}=1$.

4. 如图，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，$AB=AC$，P 为劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上一动点，连接 AP，BP，CP，在 BP 延长线上截取 $PD=PC$，连接 CD.



第 4 题图

(1)求证：$\triangle APC\backsim\triangle BDC$；

(2)当点 P 为劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点时，求证：$AP\cdot BC=AC\cdot BD$；

(3)若 $AB=4$，$BC=2$，当点 P 不是劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，且不与点 B，C 重合时候，求 $\dfrac{AP}{PB+PC}$ 的值.

【答案】(1)证明：$\because A,B,P,C$ 四点共同，

$\therefore \angle DPC=\angle BAC$，

$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\dfrac{180^\circ-\angle BAC}{2}$，

$\because PC=PD$,

$\therefore \angle D=\dfrac{180^{\circ}-\angle DPC}{2}$,

$\therefore \angle ABC=\angle D$,

又$\because \angle ABC=\angle APC$,

$\therefore \angle APC=\angle D$,

又$\because \angle CAP=\angle CBP$,

$\therefore \triangle APC\backsim\triangle BDC$;

(2)**解**：由(1)知，$\triangle APC\backsim\triangle BDC$,

$\therefore \dfrac{AP}{BD}=\dfrac{AC}{BC}$，$\therefore AP\cdot BC=AC\cdot BD$;

(3)**解**：当点 P 在劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上移动时，$\angle DPC=\angle BAC$，$PC=PD$，$AB=AC$，$\angle CAP=\angle CBP$ 恒成立，

$\therefore \angle APC=\angle D$ 恒成立，

$\therefore \triangle APC\backsim\triangle BDC$ 恒成立，

$\therefore \dfrac{AP}{BD}=\dfrac{AC}{BC}$，即$\dfrac{AP}{PB+PC}=\dfrac{AC}{BC}$恒成立，

$\therefore \dfrac{AP}{PB+PC}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{4}{2}=2.$

题型二　函数的综合应用

类型一　二次函数纯性质问题

1. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2+bx+c(b,c$

是常数)与 x 轴交于 A,B 两点(A 在 B 的左侧),与 y 轴交于点 C.

(1)若 $A(-1,0)$,$B(3,0)$,求抛物线解析式和顶点坐标;

(2)若抛物线解析式 y 可以表示为 $y=(x-h)^2-\frac{9}{4}(h>0)$ 的形式,当 $b+c=-1$ 时,过直线 BC 下方抛物线上的点 P 作 $PD\perp x$ 轴于点 D,PD 交 BC 于点 E,求 PE 的最大值;

(3)在(1)的条件下,若自变量 x 满足 $m\leqslant x\leqslant m+4$ 时,此函数的最大值为 p,最小值为 q,且 $p-q=4$,求 m 的值.

【答案】解:(1)把 $A(-1,0)$,$B(3,0)$ 代入 $y=x^2+bx+c$ 得:

$\begin{cases}1-b+c=0\\9+3b+c=0\end{cases}$,解得 $\begin{cases}b=-2\\c=-3\end{cases}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

$\because y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$,

$\therefore$ 顶点坐标为$(1,-4)$;

(2)$\because y=(x-h)^2-\frac{9}{4}=x^2-2hx+h^2-\frac{9}{4}$,

$\therefore b+c=h^2-2h-\frac{9}{4}$.

$\because b+c=-1$,

$\therefore h^2-2h-\frac{9}{4}=-1$,

$\therefore h_1=-\frac{1}{2}$(舍去),$h_2=\frac{5}{2}$,

$\therefore y=x^2-5x+4$.

当 $y=0$ 时,$x_1=1$,$x_2=4$,

$\because A$ 在 B 的左侧,

$\therefore B(4,0)$.

当 $x=0$ 时,$y=4$,

$\therefore C(0,4)$.

设直线 BC 解析式为 $y=kx+m$,则

$\begin{cases}4k+m=0\\m=4\end{cases}$,解得$\begin{cases}k=-1\\m=4\end{cases}$,$\therefore y=-x+4$.

设点 P 坐标为$(n,n^2-5n+4)(0<n<4)$,则点 E 坐标为$(n,-n+4)$.

$\because PE=-n^2+4n=-(n-2)^2+4$,

$\because 0<n<4$,$\therefore$ 当 $n=2$ 时,PE 有最大值,

此时 PE 的最大值为 4;

(3)抛物线 $y=x^2-2x-3$ 的对称轴为直线 $x=1$.

①当 $m>1$ 时,

$x=m$ 时,y 取最小值 q,此时 $q=m^2-2m-3$,

$x=m+4$ 时,y 取最大值 p,此时 $p=(m+4)^2-$

$2(m+4)-3$,

$\therefore p-q=(m+4)^2-2(m+4)-3-m^2+2m+3=4$,

解得 $m=-\frac{1}{2}$(舍去);

②当 $m+4<1$,即 $m<-3$ 时,

$x=m$ 时,y 取最大值 p,此时 $p=m^2-2m-3$,

$x=m+4$ 时,y 取最小值 q,此时 $q=(m+4)^2-2(m+4)-3$,

$\therefore p-q=m^2-2m-3-(m+4)^2+2(m+4)+3=4$,

解得 $m=-\frac{3}{2}$(舍去),

③当 $m\leqslant 1$,$m+4-1\geqslant 1-m$,即 $-1\leqslant m\leqslant 1$ 时,

$x=1$ 时,y 取最小值 q,此时 $q=-4$,

$x=m+4$ 时,y 取最大值 p,此时 $p=(m+4)^2-2(m+4)-3$,

$\therefore p-q=(m+4)^2-2(m+4)-3+4=4$,

解得 $m=-1$ 或 $m=-5$(舍去);

④当 $m+4\geqslant 1$,$1-m>m+4-1$,即 $-3\leqslant m<-1$ 时,

$x=1$ 时,y 取最小值 q,此时 $q=-4$,

$x=m$ 时,y 取最大值 p,此时 $p=m^2-2m-3$,

$\therefore p-q=m^2-2m-3+4=4$,

解得 $m=3$(舍去)或 $m=-1$(舍去).

综上所述,m 的值为 -1.

2. 在平面直角坐标系中,已知抛物线 L:$y=x^2-2mx+m^2-2$(m 为常数).

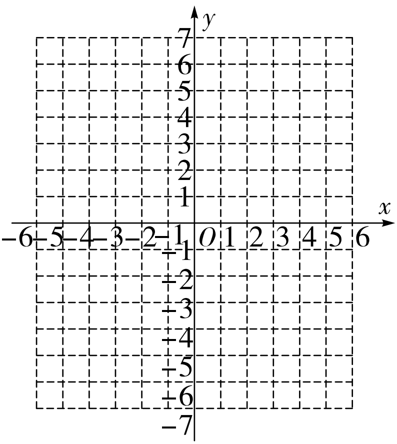
(1)求抛物线 L 的对称轴及顶点坐标(用含 m 的代数式表示);

(2)当 $m=1$ 时,下表给出抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-2$ 的一些取值情况:

x	…	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	7	2	-1	-2	-1	2	7	…

①在图中描出表中的点,并用平滑的曲线依次连接各点,得到的图象记为 L';

②观察图象,若点 (x_1,y_1),(x_2,y_2) 在抛物线 L' 上,且 $-2<x_1<-1$,$1<x_2<2$,比较 y_1,y_2 的大小,并说明理由;



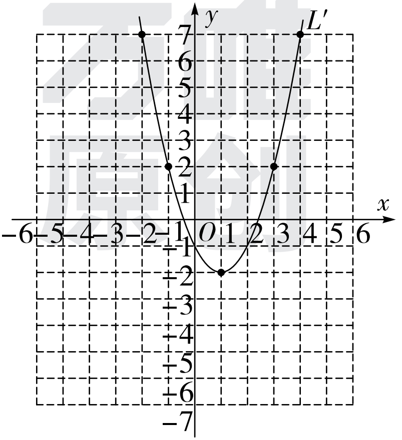
第 2 题图

(3)直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与 y 轴,x 轴分别交于 A,B 两点,当抛物线 L 与线段 AB 只有一个公共点时,求 m 的取值范围.

【答案】解:(1)$\because$ 抛物线 L:$y=x^2-2mx+m^2-2=(x-m)^2-2$,

$\therefore$ 抛物线 L 的对称轴为直线 $x=m$,顶点坐标为 $(m,-2)$;

(2)①如解图,抛物线 L' 即为所求作;



第 2 题解图

②$y_1>y_2$,理由如下:

$\because$ $m=1$,

$\therefore$ $y=x^2-2x-1$,抛物线 L' 的对称轴为直线 $x=1$.

根据图象可得,当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而增大,当 $x<1$ 时,y 随 x 的增大而减小,

$\because -2<x_1<-1, 1<x_2<2$,

根据图象可得，$y_1>y_2$；

(3) $\because$ 直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与 y 轴，x 轴分别交于 A，B 两点，

$\therefore$ 令 $x=0$，得 $y=2$；令 $y=0$，得 $x=4$，

$\therefore A(0,2), B(4,0)$.

分三种情况讨论：

①当抛物线 L 过点 A 时，可得 $m^2-2=2$，

解得 $m=2$ 或 $m=-2$，

当 $m=2$ 时，抛物线 L 的解析式为 $y=x^2-4x+2$，

令 $x^2-4x+2=-\frac{1}{2}x+2$，

解得 $x_1=0$ 或 $x_2=\frac{7}{2}$.

$\because x_2=\frac{7}{2}<4$，

$\therefore$ 两交点都在线段 AB 上，

当 $m=-2$ 时，同理可得，$x_1=0$ 或 $x_2=-\frac{9}{2}$（负值舍去），

$\therefore m$ 的取值范围是 $-2\leqslant m<2$；

②当抛物线 L 过点 B 时，可得 $(4-m)^2-2=0$，

解得 $m=4+\sqrt{2}$ 或 $m=4-\sqrt{2}$，

同理可得，m 的取值范围是 $4-\sqrt{2}<m\leqslant 4+\sqrt{2}$；

③当直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与抛物线 L 的交点为抛物线 L 顶点时，

$\because$ 抛物线 L 的顶点坐标为 $(m,-2)$，

$\therefore$ 与线段 AB 没有公共点.

综上所述，m 的取值范围为 $-2\leqslant m<2$ 或 $4-\sqrt{2}<m\leqslant 4+\sqrt{2}$.

类型二　函数新定义问题

1. 定义：将点 P 关于原点对称的点绕原点顺时针旋转 $90°$后得到的点 P' 称为 P 的反转点，连接 PP' 形成的直线称为反转线，当直线 PP' 与函数 L 的图象有交点时此时的反转线为完美直线，它们的交点 Q 叫做完美点.

(1) 已知函数 L 的解析式为 $y=\frac{6}{x}$，点 P 的坐标为 $(5,0)$，试求出点 P 变换后得到的反转线，并判断反转线是否为完美直线，若不是，请说明理由，若是，请求出完美点坐标；

(2) 已知函数 L 的解析式为 $y=x+8$，点 P 为 x 轴上异于原点的一点，经过变换后可以得到完美直线，且完美点 Q 与原点间的距离为 $2\sqrt{10}$，

求这条完美直线的解析式；

(3)已知 P 为直线 $y=\frac{1}{4}x$ 上一动点，函数 L 的解析式为 $y=-x^2+\frac{12}{5}x+\frac{37}{5}$，点 P 经过变换后得到的反转线是完美直线，且有两个完美点 Q_1，Q_2，当 $\frac{\sqrt{34}}{5}\leqslant Q_1Q_2\leqslant\frac{3\sqrt{34}}{5}$ 时，求点 P 横坐标的取值范围.

【答案】解： (1) $P(5,0)$ 关于原点的对称点坐标为 $(-5,0)$，将点 $(-5,0)$ 绕原点顺时针旋转 $90°$ 得到 $P'(0,5)$，

设反转线 PP' 解析式为 $y=kx+b(k\neq0)$，

将 $P(5,0)$，$P'(0,5)$ 代入 $y=kx+b$，

得 $\begin{cases}5k+b=0\\b=5\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}k=-1\\b=5\end{cases}$，

$\therefore$ 反转线 PP' 的解析式为 $y=-x+5$，

联立 $\begin{cases}y=-x+5\\y=\frac{6}{x}\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}x_1=2\\y_1=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=3\\y_2=2\end{cases}$，

$\therefore$ 反转线 PP' 的是完美直线，完美点坐标为 $(2,3)$ 或 $(3,2)$；

(2) 设 $P(m,0)$（其中 $m\neq0$）则得它的反转点 $P'(0,m)$，

易求得直线 PP' 的解析式为 $y=-x+m$，

联立 $\begin{cases}y=x+8\\y=-x+m\end{cases}$，可得完美点 $Q(\frac{m-8}{2},\frac{m+8}{2})$，

$\because OQ=2\sqrt{10}$，

$\therefore (\frac{m-8}{2})^2+(\frac{m+8}{2})^2=(2\sqrt{10})^2$，

解得 $m_1=4$，$m_2=-4$.

$\therefore$ 完美直线的解析式为 $y=-x+4$ 或 $y=-x-4$；

(3) $\because P$ 为直线 $y=\frac{1}{4}x$ 上一动点，

$\therefore$ 设 $P(4m,m)$ $(m\neq0)$，则 $P'(-m,4m)$，

设完美直线 PP' 的解析式为 $y=px+q$ $(q\neq0)$，

将 $P(4m,m)$ 和 $P'(-m,4m)$ 代入 $y=px+q$，

得 $\begin{cases}4mp+q=m\\-mp+q=4m\end{cases}$，解得 $\begin{cases}p=-\frac{3}{5}\\q=\frac{17}{5}m\end{cases}$，

$\therefore PP'$ 的解析式为 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{17}{5}m$.

联立$\begin{cases} y=-x^2+\dfrac{12}{5}x+\dfrac{37}{5} \\ y=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{17m}{5} \end{cases}$，得 $x^2-3x+\dfrac{17m-37}{5}=0$，

设 $Q_1(x_1,y_1)$，$Q_2(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=3$，$x_1x_2=\dfrac{17m-37}{5}$，

$y_1=-\dfrac{3}{5}x_1+\dfrac{17}{5}m$，$y_2=-\dfrac{3}{5}x_2+\dfrac{17}{5}m$，

$Q_1Q_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+\left[-\dfrac{3}{5}(x_1-x_2)\right]^2}$

$=\sqrt{\dfrac{34}{25}(x_1-x_2)^2}$

$=\dfrac{\sqrt{34}}{5}\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\dfrac{\sqrt{34}}{5}\times\sqrt{3^2-4\times\dfrac{17m-37}{5}}$，

$\because \dfrac{\sqrt{34}}{5}\leqslant Q_1Q_2\leqslant\dfrac{3\sqrt{34}}{5}$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{34}}{5}\leqslant\dfrac{\sqrt{34}}{5}\times\sqrt{3^2-4\times\dfrac{17m-37}{5}}\leqslant\dfrac{3\sqrt{34}}{5}$，

$\therefore \frac{37}{17} \leqslant m \leqslant \frac{47}{17}$,

$\therefore \frac{148}{17} \leqslant 4m \leqslant \frac{188}{17}$,

即点 P 横坐标的取值范围为$\frac{148}{17} \leqslant x_P \leqslant \frac{188}{17}$.

2. 定义:两个函数自变量最高次项系数之和为 1,且图象与 y 轴交点也相同的函数互为"友好函数".

(1)一次函数 $y_1 = ax+3$ 与一次函数 $y_2 = 4x+b$ 是"友好函数",求 a,b 的值;

(2)若一次函数 $y_1 = k_1x+h$ 和反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x+1}$是"友好函数",点 $N(3,2)$在反比例函数图象上,当 $y_1>y_2$,求 x 的取值范围;

(3)抛物线 $C_1 : y = 2x^2-8x+6$ 和抛物线 $C_2 : y = ax^2+4x+c$ 是"友好函数",且交于 A,B 两点,点 B 在点 A 的右侧,若线段 AB 沿 y 轴在$-6 \leqslant y \leqslant 6$ 内做一次往复运动,当线段 AB 与抛物线 C_1 只有一个交点时,直接写出线段 AB 平移的路径长.

【答案】解:(1)$\because$ "友好函数"函数最高次项系数之和为 1,图象与 y 轴交点相同,

$\therefore a+4=1,3=b,\therefore a=-3,b=3$;

(2)$\because$ 点 $N(3,2)$ 在函数 $y_2=\dfrac{k_2}{x+1}$ 的图象上，

$\therefore$ 将点 $N(3,2)$ 代入得，$2=\dfrac{k_2}{4}$，即 $k_2=8$，

$\therefore y_2=\dfrac{8}{x+1}$，

$\because$ 函数 $y_2=\dfrac{8}{x+1}$ 自变量 x 的次数为-1，系数为 8，

$\because$ 函数 $y_2=\dfrac{8}{x+1}$ 中 $k_2=8$，且函数图象过点$(0,8)$和一次函数 $y_1=k_1x+h$ 是"友好函数"，

$\therefore k_1=-7,h=8,\therefore y_1=-7x+8$，

联立$\begin{cases}y=-7x+8\\y=\dfrac{8}{x+1}\end{cases}$，化简得$-7x^2+x=0$，

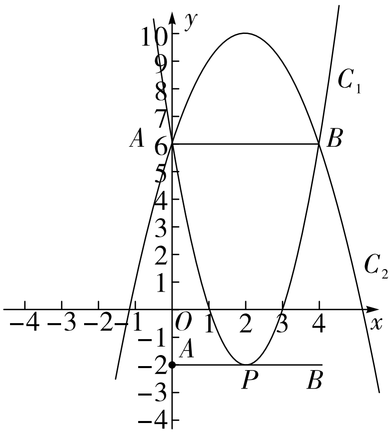
解得 $x_1=0,x_2=\dfrac{1}{7}$，

$\therefore$ 当 $y_1>y_2$ 时，x 的取值范围为 $x<-1$ 或 $0<x<\dfrac{1}{7}$；

(3)平移的路径长为 8 或 16.

【解法提示】$\because C_1:y=2x^2-8x+6$ 的"友好函数"

为 $C_2: y=ax^2+4x+c$，则 $a=1-2=-1$，$c=6$. $\therefore$ C_1：$y=2x^2-8x+6$ 的"友好函数"C_2 是 $y=-x^2+4x+6$. $\because$ 点 A，B 为抛物线 C_1，C_2 的交点，$\therefore$ $2x^2-8x+6=-x^2+4x+6$，解得 $x=0$ 或 4，$\because$ 点 B 在点 A 的右侧，$\therefore$ $A(0,6)$，$B(4,6)$. 如解图，$\because$ C_1：$y=2x^2-8x+6=2(x-2)^2-2$，$\therefore$ 抛物线 C_1 的顶点 P 为 $(2,-2)$，$\because$ $A(0,6)$，$B(4,6)$，$\therefore$ $AB/\!/x$ 轴，$\because$ 线段 AB 沿 y 轴在 $-6\leqslant y\leqslant 6$ 内做往复运动，$\therefore$ 当线段 AB 过抛物线顶点 P 时，线段 AB 与抛物线 C_1 只有一个交点，当线段 AB 第一次经过点 P 时，平移的路程为 8，当线段 AB 第二次经过点 P 时，平移的路程为 16，$\therefore$ 综上所述，平移的路径长为 8 或 16.



第 2 题解图

3. 新定义:如果抛物线与 x 轴的其中一个交点到坐标原点的距离等于抛物线与 y 轴的交点到原点的距离,那么我们称这条抛物线为“等距抛物线”,特别的,如果抛物线与 x 轴没有交点,则该抛物线不是“等距抛物线”. 已知二次函数 $y=x^2+bx+5$ 的图象是“等距抛物线”.

(1) 当 $b>0$ 时,反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象过等距抛物线的顶点,求 k 的值;

(2) 设一次函数 $y=mx+m$ 的图象与等距抛物线 $y=x^2+bx+5$ 的交点的横坐标分别为 x_1,x_2,且 $x_1<-4<x_2$,当 $b>0$ 时,写出一个符合条件的一次函数表达式,并说明理由;

(3) 当 $b<0$ 时,将等距抛物线 $y=x^2+bx+5$ 的 x 轴下方的图形沿 x 轴翻折,与剩余图形得到曲线 C,已知点 $A(0,-1)$,点 $B(n,n-1)$,当线段 AB 与曲线 C 有两个交点时,写出满足条件的 n 的取值范围.

【答案】解:(1) $\because$ 二次函数 $y=x^2+bx+5$ 的图象是“等距抛物线”,且当 $x=0$ 时,$y=5$,

$\therefore$ 当 $y=0$ 时,$x=5$ 或 $x=-5$,

$\therefore 5^2+5b+5=0$ 或 $(-5)^2-5b+5=0$,

解得 $b=-6$(舍去)或 $b=6$,

$\therefore$ 抛物线表达式为 $y=x^2+6x+5$，

$\therefore$ 抛物线顶点坐标为$(-3,-4)$，

$\because$ 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$的图象过等距抛物线的顶点，

$\therefore k=-3\times(-4)=12$；

(2)一次函数的表达式为 $y=-x-1$(答案不唯一)，理由如下：

由(1)可知 $y=x^2+6x+5$，$\because y=mx+m=m(x+1)$，

$\therefore$ 一次函数的图象过定点$(-1,0)$.

$\because$ 将 $x=-1$ 代入 $y=x^2+6x+5$ 得，$y=0$，

$\therefore x_2=-1$.

$\because x_1<-4$，

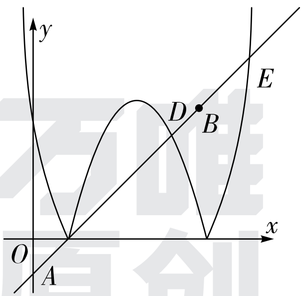
$\therefore$ 将 $x=-4$ 代入 $y=x^2+6x+5$ 得，$y=-3$，要使 $x_1<-4<x_2$，则需点$(-4,-3)$在一次函数 $y=mx+m$ 的图象的下方，即$\begin{cases}-4m+m>-3\\ m\neq 0\end{cases}$，

解得 $m<1$ 且 $m\neq 0$，则 $m=-1$ 时符合条件，

$\therefore$ 一次函数表达式 $y=-x-1$ 符合条件；

(3)$4\leqslant n<6$.**【解法提示】**由题意，当 $b<0$ 时，$y=x^2-6x+5$，当 $y=0$ 时 $x^2-6x+5=0$，解得 $x=1$ 或 $x=5$，将 $y=x^2+bx+5$ 的图象 x 轴下方的抛物线沿 x 轴对折，所得抛物线表达式为 $y=-x^2+6x-5$(1

$\leqslant x\leqslant 5$），∵ 点 $B(n,n-1)$，∴ 点 B 在直线 $y=x-1$ 上，当 $x<1$ 或 $x>5$ 时，$x^2-6x+5=x-1$ 时，即 $x^2-7x+6=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=6$，当 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时，$-x^2+6x-5=x-1$ 时，即 $x^2-5x+4=0$，解得 $x_3=1$，$x_4=4$，如解图，则点 D 的横坐标为 4，点 E 的横坐标为 6，当线段 AB 与曲线 C 有两个交点时，n 的取值范围为 $4\leqslant n<6$.



第 3 题解图