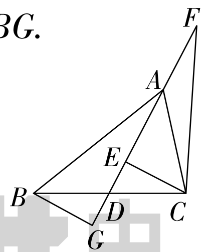
数学

题型一　几何证明与计算

1. 如图，在$\triangle ABC$中，AD为BC边上的中线，$CE\perp AD$. 延长DA至点F，连接FC，使$\angle F=\angle BAD$，延长ED至点G，使$DG=DE$，连接BG.

(1)求证：$BG\perp FG$；

(2)若$DE=\frac{3}{2}$，求AF的长.



第 1 题图

【答案】(1)证明：$\because CE\perp AD$，

$\therefore \angle CED=90°$.

$\because AD$为BC边上的中线，$\therefore BD=CD$.

在$\triangle BDG$和$\triangle CDE$中，$\begin{cases} BD=CD, \\ \angle BDG=\angle CDE, \\ DG=DE, \end{cases}$

$\therefore \triangle BDG\cong\triangle CDE(\text{SAS})$，

$\therefore \angle G=\angle CED=90°$，即$BG\perp FG$；

(2)解：由$\triangle BDG\cong\triangle CDE$可知$BG=CE$.

在$\triangle ABG$和$\triangle FCE$中，$\begin{cases} \angle BAG=\angle F, \\ \angle G=\angle CEF, \\ BG=CE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABG\cong\triangle FCE(\text{AAS})$，

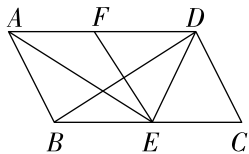
$\therefore AG=FE$，$\therefore AG-AE=EF-AE$，即 $EG=AF$.

$\because DG=DE$，$\therefore EG=2DE$，$\therefore AF=2DE=3$.

2. 如图，在▱$ABCD$ 中，$BC=2AB$，E 为 BC 的中点，EF 为对角线 BD 的垂直平分线，连接 AE，DE.

(1)求证：$AB=DE$；

(2)若 $BC=4$，求 AE 的长.



第 2 题图

【答案】(1)证明：$\because E$ 为 BC 的中点，$BC=2AB$，$\therefore AB=BE$.

$\because EF$ 为 BD 的垂直平分线，

$\therefore BE=DE$，$\therefore AB=DE$；

(2)解：$\because BC=4$，$\therefore AD=4$，$DE=AB=\frac{1}{2}BC=2$.

由(1)可知 $CD=CE=DE$，

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形，

$\therefore \angle C=\angle CED=60^\circ$，$\therefore \angle ABE=120^\circ$，

$\therefore \angle BAE=\angle BEA=30^\circ$.

$\therefore \angle AED=180^\circ-\angle BEA-\angle CED=90^\circ$，

$\therefore \triangle ADE$ 为直角三角形.

在 $Rt\triangle ADE$ 中，根据勾股定理，得 $AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

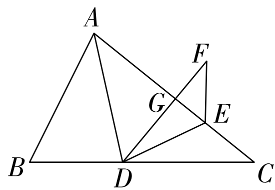
3. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=2\angle C$，AD 是$\angle BAC$ 的平分线，E 为 AC 上一点，使得 $\angle ADB=$

$\angle ADE$，连接 DE，点 F 与点 C 关于直线 DE 对称，连接 EF，DF，DF 交 AC 于点 G.

(1)求证：$\triangle ABD\cong\triangle AED$；

(2)若 $AD=5$，$FG=\frac{1}{2}EF$，求 AG 的长；

(3)若 $\angle C=\angle CDE$，求证：$AD\cdot EF=BD\cdot DC$.



第 3 题图

【答案】(1)证明：$\because$ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore$ $\angle BAD=\angle CAD$，

又$\because$ $\angle ADB=\angle ADE$，$AD=AD$，

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle AED$(ASA)；

(2)解：$\because$ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore$ $\angle BAC=2\angle CAD$，

又$\because$ $\angle BAC=2\angle C$，

$\therefore$ $\angle CAD=\angle C$，

$\because$ 点 F 与点 C 关于直线 DE 对称，

$\therefore$ $\angle C=\angle F$，

$\therefore$ $\angle CAD=\angle F$，

又$\because$ $\angle AGD=\angle FGE$，

$\therefore$ $\triangle AGD\backsim\triangle FGE$，

$\therefore \dfrac{AG}{FG}=\dfrac{AD}{FE}$,

$\because FG=\dfrac{1}{2}EF$,

$\therefore \dfrac{AG}{AD}=\dfrac{FG}{FE}=\dfrac{1}{2}$,

$\because AD=5$,

$\therefore \dfrac{AG}{5}=\dfrac{1}{2}$,

解得 $AG=\dfrac{5}{2}$;

(3)**证明:** $\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle BAC=2\angle CAD$,

由(1)得, $\triangle ABD\cong\triangle AED$,

$\therefore BD=DE$,

$\because \angle BAC=2\angle C$,

$\therefore \angle CAD=\angle C$, $\therefore AD=DC$,

$\because \angle C=\angle CDE$,

$\therefore \angle CAD=\angle CDE$,

$\because \angle C=\angle C$,

$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle DEC$,

$\therefore \dfrac{AD}{DE}=\dfrac{DC}{EC}$, 即 $AD\cdot EC=DE\cdot DC$,

$\because$ 点 F 与点 C 关于直线 DE 对称，

$\therefore EC=EF$，

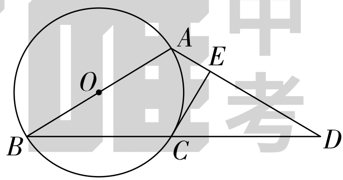
$\therefore AD \cdot EF=BD \cdot DC$.

题型二　与圆有关的证明与计算

1. 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，延长弦 BC 至点 D，使 $CD=BC$，连接 AD，过点 C 作 $\odot O$ 的切线，交 AD 于点 E.

(1)求证：$CE \perp AD$；

(2)若 $\odot O$ 的半径为 4，$AE=2$，求 BC 的长.



第 1 题图

【答案】(1)证明： 如解图，连接 OC，

$\because OA=OB, BC=CD$，

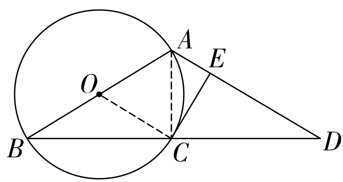
$\therefore OC$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore OC /\!/ AD$.

$\because CE$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore OC \perp CE$.

$\therefore CE \perp AD$；



第 1 题解图

(2)**解：** 如解图，连接 AC，$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB=\angle ACD=90°$.

$\because BC=CD$，$\therefore AD=AB=8$.

$\therefore DE = AD - AE = 8 - 2 = 6.$

由(1)得 $CE \perp AD$,$\therefore \angle CED = \angle ACD = 90°$.

$\because \angle CDE = \angle ADC$,

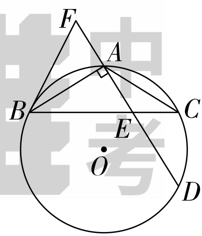
$\therefore \triangle CED \backsim \triangle ACD$.

$\therefore \frac{ED}{CD} = \frac{CD}{AD}$,$\therefore \frac{6}{CD} = \frac{CD}{8}$,

解得 $CD = 4\sqrt{3}$(负值已舍去).

$\therefore BC = CD = 4\sqrt{3}$.

2. 如图,$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,$AB = AC$,过点 A 作 $AD \perp AB$,交 $\odot O$ 于点 D,交 BC 于点 E,延长 DA 到点 F,使 $AF = AE$,连接 BF.



第 2 题图

(1)求证:BF 是 $\odot O$ 的切线;

(2)若 $\odot O$ 的半径为 2,$BE = 3$,求 DE 的长.

【答案】(1)证明: 如解图,连接 BD,

$\because AD \perp AB$,

$\therefore \angle BAD = 90°$,

$\therefore BD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ABD + \angle D = 90°$.

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \angle C$.

$\because AF=AE, EF\perp AB$,

$\therefore BA$ 是线段 FE 的垂直平分线,

$\therefore BF=BE$,

$\therefore \angle ABF=\angle ABC$.

$\because \angle D=\angle C$,

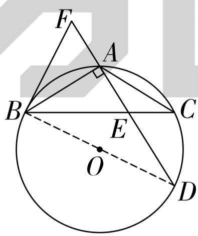
$\therefore \angle D=\angle ABF$,

$\therefore \angle FBD=\angle ABD+\angle ABF=\angle ABD+\angle D=90^{\circ}$,

$\therefore BF\perp OB$.

$\because OB$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore BF$ 是 $\odot O$ 的切线;



第 2 题解图

(2)解:$\because OB=2$,

$\therefore DB=2OB=4$.

$\because \angle ABC=\angle D, \angle BAE=\angle DAB$,

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle ADB$,

$\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BE}{DB}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{3}{4}$,

$\therefore AE=\frac{3}{4}AB, AB=\frac{3}{4}AD.$

$\because$ 在 Rt $\triangle ABD$ 中，由勾股定理，得 $BD^2=AB^2+AD^2$，

$\therefore 4^2=(\frac{3}{4}AD)^2+AD^2$，

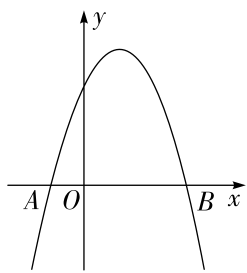
解得 $AD=\frac{16}{5}$（负值已舍去），

$\therefore AE=\frac{3}{4}AB=\frac{9}{16}AD=\frac{9}{5}$，

$\therefore DE=AD-AE=\frac{16}{5}-\frac{9}{5}=\frac{7}{5}.$

题型三　函数综合题

1. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点.



第 1 题图

(1) 求抛物线的表达式及顶点的坐标；

(2) 点 M 是抛物线上一点且到 y 轴的距离小于 4，求出点 M 的纵坐标 y_M 的取值范围；

(3) 若 $E(3n-4,y_1)$，$F(5n+6,y_2)$ 分别为抛物线

上在对称轴两侧的点，且 $y_1>y_2$，请直接写出 n 的取值范围.

【答案】解：(1) ∵ 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$两点，

∴ $\begin{cases}-1-b+c=0,\\-9+3b+c=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b=2,\\c=3,\end{cases}$

∴ 抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3$，

∴ $y=-(x-1)^2+4$，

∴ 抛物线顶点的坐标为(1,4)；

(2)∵ $-4<x<4$，且抛物线的对称轴为直线 $x=1$，

∴ 当 $x=1$ 时，抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 取得最大值，最大值为 4；

当 $x=-4$ 时，$y=-21$；当 $x=4$ 时，$y=-5$，

∴ 点 M 的纵坐标 y_M 的取值范围是$-21<y_M\leqslant 4$；

(3)$0<n<\frac{5}{3}$.

【解法提示】当点 E 在对称轴直线 $x=1$ 的左侧，点 F 在对称轴直线 $x=1$ 的右侧时，由题意得 $\begin{cases}3n-4<1,\\5n+6>1,\end{cases}$ 解得$-1<n<\frac{5}{3}$，∵ $y_1>y_2$，∴ $1-(3n-4)<5n+6-1$，解得 $n>0$，∴ $0<n<\frac{5}{3}$；当点 F 在对称轴

直线 $x=1$ 的左侧，点 E 在对称轴直线 $x=1$ 的右侧时，由题意得 $\begin{cases}3n-4>1,\\5n+6<1,\end{cases}$ 该不等式组无解. 综上所述，$0<n<\dfrac{5}{3}$.

2. 已知抛物线 $y=x^2-2mx+c$ 与 y 轴交于点 $(0,-3)$.

(1) 当抛物线经过点 $(1,-4)$ 时，求 m 的值；

(2) 判断抛物线与 x 轴有无交点？并说明理由；

(3) 若抛物线上存在点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，其中 $x_1-y_1=0$，$x_2+y_2=0$. 当 $x_1<0$，$x_2>0$ 时，总有 $x_1+x_2>0$，求 m 的取值范围.

【答案】解： (1) 把 $(0,-3)$ 和 $(1,-4)$ 代入抛物线解析式 $y=x^2-2mx+c$ 中，得 $\begin{cases}c=-3,\\1-2m+c=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=1,\\c=-3;\end{cases}$

(2) 有.

理由：由 (1) 知 $c=-3$，即 $y=x^2-2mx-3$.

令 $x^2-2mx-3=0$，

$\because b^2-4ac=(-2m)^2-4\times1\times(-3)=4m^2+12>0$，

$\therefore$ 抛物线与 x 轴有 2 个不同的交点；

(3) $\because A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是抛物线 $y=x^2-$

$2mx-3$ 上的两点,

$\therefore y_1=x_1^2-2mx_1-3, y_2=x_2^2-2mx_2-3.$

$\because x_1-y_1=0, x_2+y_2=0,$

$\therefore x_1=x_1^2-2mx_1-3, -x_2=x_2^2-2mx_2-3,$

$\therefore x_1^2-2mx_1-x_1-3=0$①, $x_2^2-2mx_2+x_2-3=0$②,

由①-②得, $x_1^2-x_2^2-2mx_1+2mx_2-x_1-x_2=0,$

$\therefore (x_1-x_2)(x_1+x_2)-2m(x_1-x_2)=x_1+x_2,$

$\therefore x_1+x_2-2m=\dfrac{x_1+x_2}{x_1-x_2}.$

$\because x_1<0, x_2>0, x_1+x_2>0, \therefore x_1-x_2<0,$

$\therefore x_1+x_2-2m<0, \therefore m>\dfrac{x_1+x_2}{2}.$

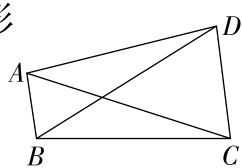
$\because x_1+x_2>0, \therefore m>0.$

题型四　几何新定义

1. 请仔细阅读下列材料,并完成相应任务.

等角线四边形

如图①, 在四边形 $ABCD$ 中, 如果对角线 AC 和 BD 相交并且相等, 那么我们把这样的四边形 $ABCD$ 称为等角线四边形.



第 1 题图①

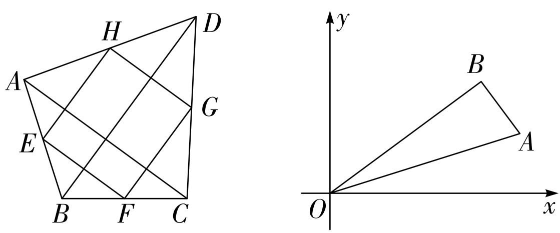
任务一:

(1)在“平行四边形、正方形、菱形”中,________一定是等角线四边形(填写图形名称);

(2)如图②,若点 E,F,G,H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 的中点,当对角线 $AC\perp BD$ 时,求证:四边形 $EFGH$ 是等角线四边形;

任务二:应用

(3)如图③,在平面直角坐标系 xOy 中,$\triangle AOB$ 的顶点 O 在原点上,$\angle OBA=90°$,点 B 的坐标为(4,3),且 $OB=3AB$,点 M 为线段 OB 的三等分点,点 N 为平面内一点,当四边形 $ABMN$ 为等角线四边形,且一组对边相等时,请直接写出此时点 N 的坐标.



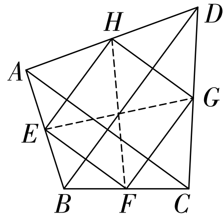
图② 图③

第 1 题图

【答案】(1)解:正方形;

(2)证明:如解图①,连接 GE,FH,

$\because$ 点 G,H 分别是 CD,DA 的中点，



第 1 题解图①

$\therefore GH$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线，

$\therefore GH /\!/ AC, GH=\frac{1}{2}AC.$

同理可证 $EF /\!/ AC, EF=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore EF=GH, EF /\!/ GH$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

$\because E,H$ 分别是 AB,DA 的中点，

$\therefore EH /\!/ BD.$

$\because AC\perp BD$，$\therefore EF\perp EH$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形，$\therefore EG=FH$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是等角线四边形；

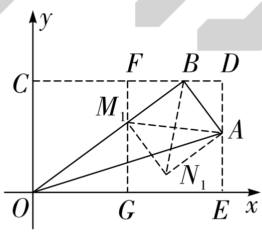
(3)**解：**点 N 的坐标为 $(\frac{11}{3},\frac{2}{3})$ 或 $(\frac{7}{3},-\frac{1}{3})$.

【解法提示】分两种情况：①如解图②，当 $OM_1=2BM_1$ 时，过点 A 作 $DE /\!/ y$ 轴交 x 轴于点 E，过点 B 作 $CD /\!/ x$ 轴交 y 轴于点 C，交 DE 于点 D，过点 M_1 作 $FG\perp CD$ 交 CD 于点 F，交 x 轴于点 G，连接 AM_1，BN_1，则四边形 $COED$ 和四边形 $DFGE$ 均为矩形. $\because$ 四边形 ABM_1N_1 为等角线四

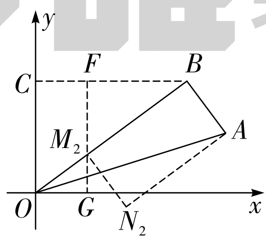
边形，且一组对边相等，$\therefore AM_1=N_1B$，令 $AB=M_1N_1$，$\therefore \triangle ABM_1\cong\triangle N_1M_1B$，$\therefore \angle N_1M_1B=\angle ABM_1=90°$，$\therefore AB/\!/M_1N_1$，$\therefore$ 四边形 ABM_1N_1 为矩形，$\because OB=3AB$，$\therefore AB=BM_1$，$\therefore$ 四边形 ABM_1N_1 为正方形，即此时四边形 ABM_1N_1 为等角线四边形，且一组对边相等．$\because B(4,3)$，$\therefore DE=OC=3$，$BC=4$．易证 $\triangle BFM_1\backsim\triangle BCO$，$\therefore \frac{BF}{BC}=\frac{FM_1}{CO}=\frac{BM_1}{BO}=\frac{1}{3}$，$\therefore FM_1=1$，$BF=\frac{4}{3}$，$M_1G=2$，易证 $\triangle BFM_1\cong\triangle ADB$，$\therefore AD=BF=\frac{4}{3}$，$BD=FM_1=1$，$\therefore OE=CD=5$，$\therefore OG=CF=CD-DF=\frac{8}{3}$，$\therefore$ 点 M_1 的坐标为 $(\frac{8}{3},2)$．$\because AE=DE-AD=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(5,\frac{5}{3})$．由坐标平移可知，点 N_1 的坐标为 $(\frac{11}{3},\frac{2}{3})$；②如解图③，当 $BM_2=2OM_2$ 时，过点 B 作 $BC/\!/x$ 轴交 y 轴于点 C，过点 M_2 作 $FG\perp BC$，交 BC 于点 F，交 x 轴于点 G，$\because B(4,3)$，$\therefore OC=3$，$BC=4$．$\because OB=3AB$，$\therefore$

$OM_2=AB$,同①理可得,四边形 ABM_2N_2 为矩形,易证 $\triangle BFM_2\backsim\triangle BCO$, $\therefore \dfrac{BF}{BC}=\dfrac{FM_2}{CO}=\dfrac{BM_2}{BO}=\dfrac{2}{3}$,

$\therefore FM_2=2$, $M_2G=1$, $OG=\dfrac{4}{3}$, $\therefore$ 点 M_2 的坐标为 $(\dfrac{4}{3},1)$, 由坐标平移可知, 点 N_2 的坐标为 $(\dfrac{7}{3},-\dfrac{1}{3})$. 综上所述,点 N 的坐标为 $(\dfrac{11}{3},\dfrac{2}{3})$ 或 $(\dfrac{7}{3},-\dfrac{1}{3})$.



图②



图③

第 1 题解图