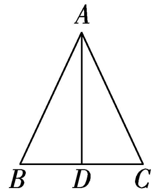
重难题一　作图题

1. (2023 陕西黑白卷)如图，已知△ABC，$AB=AC$，$AD\perp BC$于点D.

请用尺规作图法，在AC上求作一点E，使得△ABD∽△DCE.(保留作图痕迹，不写作法)

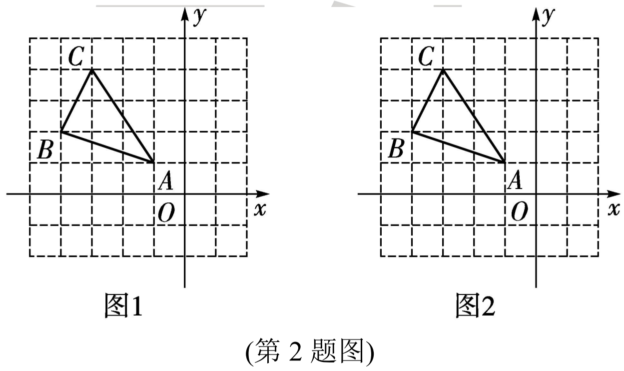


(第 1 题图)

2. (2023 江西黑白卷)**新考法·结合平面直角坐标系考查** 如图，在 7×7 的正方形网格中建立平面直角坐标系，点A，B，C的坐标分别为$(-1，1)$，$(-4，2)$，$(-3，4)$，请仅用无刻度的直尺按要求完成以下作图(保留作图痕迹).

(1)在图 1 中的格点上作一点D，使$BD\perp AC$；

(2)在图 2 中的x轴上作一点E，使$\angle BEO+\angle CEO=180°$.



(第 2 题图)

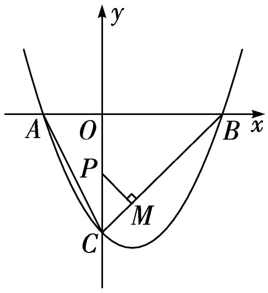
重难题二　函数综合题

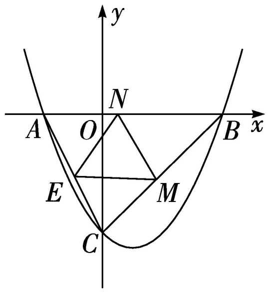
3. (2023重庆黑白卷)新考法·结合动态几何　如图，已知二次函数$y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$的图象与x轴交于点$A(-2，0)$，$B(4，0)$，与y轴交于点C.

(1)求二次函数的解析式；

(2)如图1，点M是线段BC上一点，点M从点B出发，以每秒$\sqrt{2}$个单位长度的速度向终点C运动，运动时间为t秒，过点M作$PM\perp BC$交y轴于点P，当$t=3$时，求点P的坐标；

(3)如图2，在第(2)问的条件下，若点E是线段AC的中点，点N是线段AB上一动点，点M运动的同时，点N从点A出发，以每秒1个单位长度的速度向点B运动，当点M运动到终点时点N停止运动，设$\triangle EMN$的面积为S，求S与t之间的函数解析式.





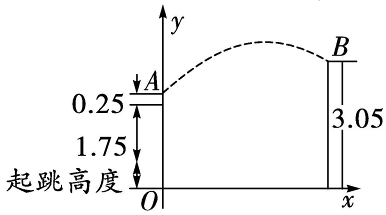
(第3题图)

4. (2023江西黑白卷)如图是身高为1.75 m的小明在距篮筐4 m处跳起投篮的路线示意图，篮球运行轨迹可近似看作抛物线的一部分，球在小明头顶上方0.25 m的A处出手，在距离篮筐水平距离为1.5 m处达到最大高度3.5 m，然后准确落入篮筐B内. 以小明起跳点O为原点，建立如图所示的平面直角坐标系.

(1)求篮球运行轨迹所在抛物线的解析式；

(2)当小明按照如图方式投篮出手时，小刚在小明与篮筐之间跳起防守，已知小刚最高能摸到2.7 m，则小刚与小明的距离在什么范围内才能在空中截住篮球？

(3)当小明不起跳直接投篮时，篮球运动的抛物线形状与跳起投篮时相同，若他想投中篮筐，则应该向前走多远？(投篮时，球从下方穿过球篮无效)



(第4题图)

重难题三　几何综合题

5. (2023安徽黑白卷)新考法·综合与实践

【问题情境】

张老师在课堂上出示了这样一个题目：如图1，在Rt△ABC中，$\angle ABC=90°$，点D是AC边上一点，连接BD，且$\angle A=2\angle CBD$，求证：$AB=AD$.

【尝试思考】

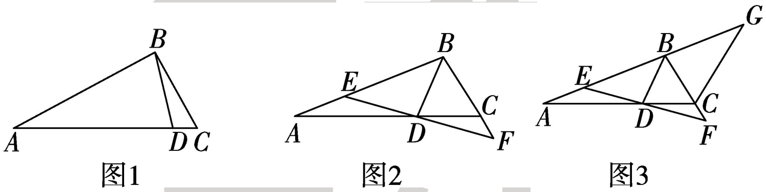
(1)小智同学发现作$\angle DBP=\angle CBD$交AC于点P，即可得证，请你思考小智同学的方法是否正确并给出你的解法；

【类比探究】

(2)希望小组受到启发，提出新的问题，请你思考并解答：如图2，△ABC中，点D是AC边上一点，连接BD，且$\angle A=\frac{1}{2}\angle ABD$，点$E$是$AB$边上一点，连接$DE$，且$\angle BDE=\angle ABC$，延长$ED$，$BC$交于点$F$.

①在图2中找出与$\angle F$相等的角，并证明；

②如图3，延长AB至点G，连接CG，使得$\angle G=\angle BED$，若$AG=kBE$，猜想并证明线段AB与BD的数量关系.



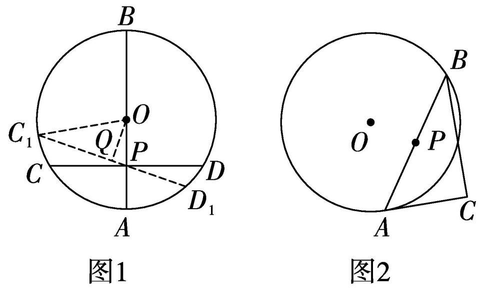
(第5题图)

6. (2023 河南黑白卷)阅读下列材料，并完成相应任务：

定义：如图 1，⊙O 内有一点 P，过点 P 最短的弦 CD 叫做点 P 的“极小弦”，过点 P 最长的弦 AB 叫做点 P 的“极大弦”，极大弦即为过点 P 的⊙O 的直径 AB.有关极弦有如下结论:如图 1,过⊙O 内一点 P 的“极大弦”AB 垂直平分过该点的“极小弦”CD.

某数学兴趣小组为了证明该结论，他们进行了如下证明.

证明：如图 1，过点 P 作⊙O 的弦 C_1D_1，过点 O 作 $OQ\perp C_1D_1$ 于点 Q，连接 OC_1…



(第 6 题图)

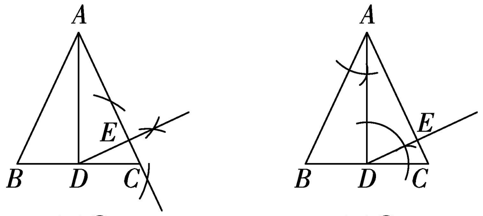
任务：

(1)请将不完整的“证明”过程补充完整；

(2)如图 2，点 P 为⊙O 内一点，AB 是过点 P 的极小弦，过点 B 作 BC 垂直于⊙O 的切线 AC 于点 C，若 $AC=4$，$AB=4\sqrt{5}$，求⊙O 的半径.

重难题一　作图题

1. 解：如解图①，点 E 即为所求.



图①　　图②

第 1 题解图

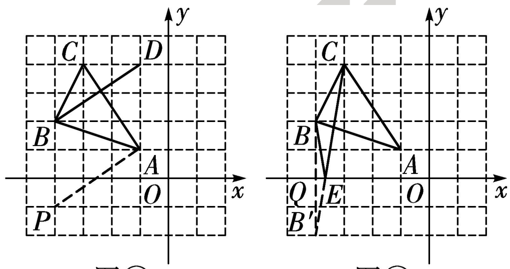
【一题多解法】解法二：如解图②，点 E 即为所求.

2. 解：(1)如解图①，点 D 即为所求；

【作法提示】如解图①，取格点 P 使 $AP\perp AC$，然后把 AP 向上平移 3 个单位长度，则点 A 的对应点即为点 D.

(2)如解图②，点 E 即为所求.

【作法提示】如解图②，作点 B 关于 x 轴的对称点 B'，连接 CB'交 x 轴于点 E，连接 BB'交 x 轴于点 Q，连接 BE，∵点 B 和点 B'关于 x 轴对称，∴$\angle BEQ=\angle B'EQ$.∵$\angle CEO=\angle B'EQ$，∴$\angle CEO=\angle BEQ$.∵$\angle BEO+\angle BEQ=180°$，∴$\angle BEO+\angle CEO=180°$，∴点 E 即为所求.



图①　　图②

第 2 题解图

【难点点拨】本题的难点在于第(2)问，要使$\angle BEO+\angle CEO=180°$，联想到利用轴对称作图是关键.

重难题二　函数综合题

3. 解：(1)把 $A(-2，0)$，$B(4，0)$代入二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$，

得$\begin{cases}2-2b+c=0\\8+4b+c=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=-1\\c=-4\end{cases}$，

∴二次函数的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$；

(2)∵二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$ 的图象与 y 轴交于点 C，

∴$C(0，-4)$，

∵$B(4，0)$，

∴$BC=4\sqrt{2}$，$\angle OBC=\angle OCB=45°$，

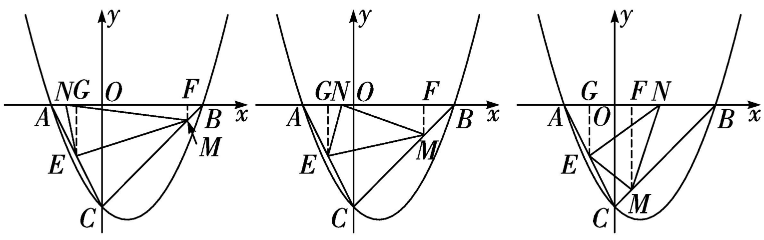
当 $t=3$ 时，$BM=3\sqrt{2}$，

∴$CM=BC-BM=\sqrt{2}$，

∵$PM\perp BC$，$\angle OCB=45°$，

∴△PCM为等腰直角三角形，
∴$CP=2$，$OP=OC-CP=2$，
∴$P(0，-2)$；
(3)如解图①，过点E作$EG\perp x$轴于点G，
∵$EG// y$轴，
∴$\triangle AEG\backsim\triangle ACO$，
∵点E是线段AC的中点，
∴$\frac{AG}{OA}=\frac{AE}{AC}=\frac{GE}{OC}=\frac{1}{2}$，
∵$A(-2，0)$，$C(0，-4)$，
∴$E(-1，-2)$，则$G(-1，0)$，
点N从点A运动到点B的时间为$[4-(-2)]\div1=6$秒，
点M从点B运动到点C的时间为$4\sqrt{2}\div\sqrt{2}=4$秒，
∴$0\leqslant t\leqslant4$，
过点M作$MF\perp x$轴于点F，
由题意得$AN=t$，$BM=\sqrt{2}t$，
∵$OC=OB=4$，$\angle OBC=45°$，
∴$MF=FB=t$，
∴$GE=2$，$GF=6-1-t=5-t$，
∵当$t=3$时，$AN=BF=3$，N，F两点重合，
则根据N，F两点的位置可分三种情况讨论：
①如解图①，当$0\leqslant t<1$时，$NG=1-t$，$NF=6-t-t=6-2t$，
∴$S_{\triangle NME}=S_{\triangle NEG}+S_{四边形GEMF}-S_{\triangle NMF}=\frac{1}{2}\times2(1-t)+\frac{1}{2}(t+2)(5-t)-\frac{1}{2}t\cdot(6-2t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+6$；
②如解图②，当$1\leqslant t<3$时，$NG=t-1$，$NF=6-t-t=6-2t$，
∴$S_{\triangle NME}=S_{四边形GEMF}-S_{\triangle NEG}-S_{\triangle NMF}=\frac{1}{2}(t+2)(5-t)-\frac{1}{2}\times2\times(t-1)-\frac{1}{2}t(6-2t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+6$；
③如解图③，当$3\leqslant t\leqslant4$时，$NG=t-1$，$NF=t+t-6=2t-6$，
∴$S_{\triangle NME}=S_{四边形GEMF}+S_{\triangle NMF}-S_{\triangle NEG}=\frac{1}{2}(t+2)(5-t)+\frac{1}{2}t(2t-6)-\frac{1}{2}\times2\times(t-1)=\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+6$；

综上所述，S与t之间的函数解析式为$S=\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+6(0\leqslant t\leqslant4)$.



图①　图②　图③

第3题解图

4. 解：(1)由题意知，抛物线的顶点坐标为(2.5，3.5)，
∴设抛物线的解析式为$y=a(x-2.5)^2+3.5$，
由题图知抛物线的图象过点$B(4，3.05)$，代入抛物线的解析式$y=a(x-2.5)^2+3.5$中，

得 $a(4-2.5)^2+3.5=3.05$，解得 $a=-0.2$，

∴抛物线的解析式为 $y=-0.2(x-2.5)^2+3.5$；

(2)令 $y=2.7$，则 $2.7=-0.2(x-2.5)^2+3.5$，

解得 $x_1=4.5$，$x_2=0.5$.

∵此时小明与篮筐的距离为 4 m，

∴$x=0.5$，

∴小明投篮出手时，小刚与小明的距离在 0.5 m 以内才能在空中截住篮球；

(3)设球出手时，小明跳离地面的高度为 h m，则球出手时，球的高度为 $h+1.75+0.25=(h+2)$m.

∵抛物线 $y=-0.2(x-2.5)^2+3.5$ 经过点 A，

∴$h+2=-0.2\times(0-2.5)^2+3.5$，解得 $h=0.25$，

∴球出手时，小明跳离地面的高度是 0.25 m.

∵当小明不起跳直接投篮时，篮球运动的抛物线形状与跳起投篮时相同，

∴小明不起跳直接投篮时，篮球运动的抛物线为 $y+0.25=-0.2(x-2.5)^2+3.5$，

∴$y=-0.2(x-2.5)^2+3.25$，

当 $y=3.05$ 时，$-0.2(x-2.5)^2+3.25=3.05$，

解得 $x_1=1.5$，$x_2=3.5$，

∴小明与篮筐的距离为 3.5 m 或 1.5 m 时，可以投中篮筐，

∴他应该向前走 $4-3.5=0.5$ m 或 $4-1.5=2.5$ m(不符合题意，舍去)，

∴若小明想投中篮筐，则应该向前走 0.5 m.

重难题三　几何综合题

5. 解：(1)小智的方法正确，

如解图①，作 $\angle DBP=\angle CBD$ 交 AC 于点 P.

∵ $\angle DBP=\angle CBD$，$\angle A=2\angle CBD$，

∴ $\angle A=\angle CBP$，

∵ $\angle CBP+\angle ABP=90°$，

∴ $\angle A+\angle ABP=90°$，

∴ $\angle APB=90°$，

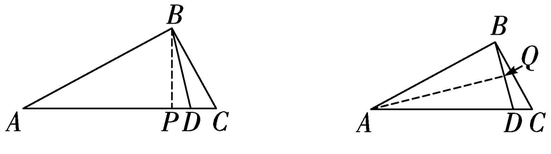
∴ $\angle CBP+\angle C=90°$，

∵ $\angle ABP+\angle CBP=90°$，

∴ $\angle ABP=\angle C$，

∴ $\angle ADB=\angle CBD+\angle C=\angle DBP+\angle ABP=\angle ABD$，

∴$AB=AD$；



图①　　图②

第 5 题解图

【一题多解法】解法二：如解图②，作 AQ 平分 $\angle BAC$，与 BD 相交于点 Q，则 $\angle BAQ=\angle DAQ$，

∵ $\angle BAC=2\angle CBD$，

∴ $\angle BAQ=\angle CBD$，

∵ $\angle CBD+\angle ABD=90°$，

∴ $\angle BAQ+\angle ABD=90°$，

∴ $\angle AQB=90°$，

∵$AQ=AQ$，$\angle AQB=\angle AQD=90°$，

∴$\triangle AQB\cong\triangle AQD(ASA)$，

∴$AB=AD$；

解法三：设$\angle CBD=x$，则$\angle A=2\angle CBD=2x$，

∵$\angle C+2x=\angle ABD+x=90°$，

∴$\angle ABD=\angle C+x$，

∵$\angle ADB=\angle C+x$，

∴$\angle ADB=\angle ABD$，

∴$AB=AD$；

(2)①$\angle F=\angle ABD$，

证明：∵$\angle BDE=\angle FBE$，$\angle BED=\angle FEB$，

∴$\triangle BDE\backsim\triangle FBE$，

∴$\angle F=\angle ABD$；

②$AB=kBD$.

证明：如解图③，延长GC至点K，连接AK，使得$\angle CAK=\angle GAC$，

∴$\angle GAK=2\angle GAC$，

∵$\angle A=\frac{1}{2}\angle ABD$，

∴$\angle DBE=2\angle GAC$，

∴$\angle DBE=\angle GAK$，

∵$\angle BED=\angle G$，

∴$\triangle BED\backsim\triangle AGK$，

∴$\frac{BE}{AG}=\frac{BD}{AK}=\frac{1}{k}$，$\angle BDE=\angle AKG$，

∴$AK=kBD$，

∵$\angle BDE=\angle ABC$，

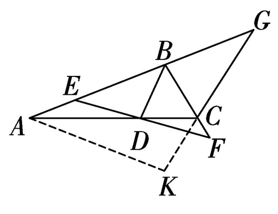
∴$\angle ABC=\angle AKC$，

∵$\angle BAC=\angle KAC$，$AC=AC$，

∴$\triangle ABC\cong\triangle AKC(AAS)$，

∴$AB=AK$，

∴$AB=kBD$.



第 5 题解图③

6. 解：(1)过程补充完整如下：

∵$OQ\perp C_1D_1$，

∴$QC_1=QD_1$，

在 Rt$\triangle C_1OQ$ 中，由勾股定理得 $QC_1=\sqrt{OC_1^2-OQ^2}$，

∴$C_1D_1=2\sqrt{OC_1^2-OQ^2}$，

∵半径 OC_1 是定值，要使 C_1D_1 是极小弦，即 C_1D_1 的长最小，则需 OQ 最长，

∴当点 Q 与点 P 重合时，OQ 最长，

∴极大弦 AB 垂直平分极小弦 CD；

(2)如解图，连接 OP，OA，

∵AB 是过点 P 的极小弦，

∴OP 垂直平分 AB，

∴$AP=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{5}$，

在 Rt△ABC 中，由勾股定理得 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=8$，

∵AC 是⊙O 的切线，

∴$\angle OAC=90°$，

∵$BC\perp AC$，

∴$OA\parallel BC$，

∴$\angle OAP=\angle ABC$，

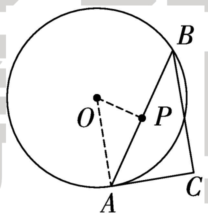
∵$\angle APO=\angle BCA=90°$，

∴$\triangle AOP\backsim\triangle BAC$，

∴$\frac{OA}{AB}=\frac{AP}{BC}$，

∴$\frac{OA}{4\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{8}$，解得 $OA=5$，

∴⊙O 的半径为 5.



第 6 题解图