

数 学
题型一 综合与实践

1. 综合与实践

问题情境：在综合与实践课上，老师提出了这样的问题：已知，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=25$ ， $BC=30$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ，点 E 在线段 AD 上，且 $AE = \frac{3}{5} AB$ ，以 AE 为边在直线 AD 左侧作 $\triangle AEF$ ，使 $AF=AE$ ， $EF=18$ 。

猜想证明：

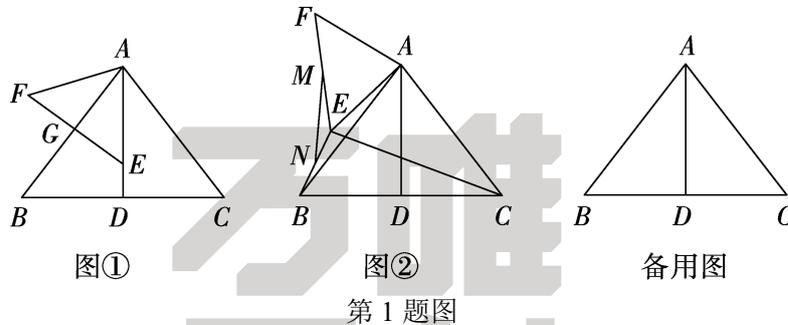
(1)如图①，设 EF 与 AB 交于点 G ，则 $\angle AGF$ 的度数为_____；

探究发现：

(2)如图②，探究小组的同学将 $\triangle AEF$ 绕点 A 顺时针旋转 α ，连接 BE ， M 、 N 分别为线段 EF 、 BE 的中点，连接 MN 、 CE 。请你猜想线段 MN 与 CE 的数量关系并证明；

拓展延伸：

(3)创新小组的同学继续进行探究。在将 $\triangle AEF$ 绕点 A 顺时针旋转 $\alpha(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ 的过程中，当以 A 、 E 、 D 、 C 为顶点的四边形是平行四边形时，请你写出 α 的大小及 CE 的长。



第1题图

2. 综合与实践

问题情境：在数学活动课上，老师让同学们以“菱形纸片的折叠”为主题展开活动。已知菱形 $ABCD$ ， $\angle BAD=120^\circ$ ，点 E 、 F 分别是 AB 、 BC 边上的点，将菱形 $ABCD$ 沿 EF 折叠。

猜想证明：

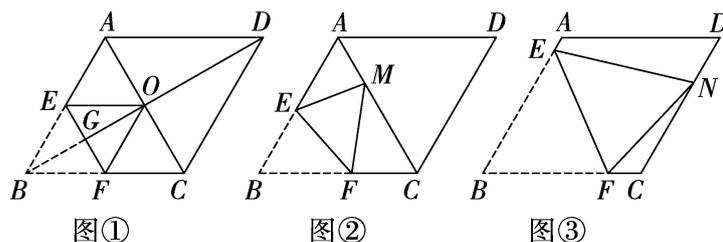
(1)如图①，设对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，若点 B 的对应点与点 O 重合，折痕 EF 交 BD 于点 G 。试判断四边形 $EBFO$ 的形状，并说明理由；

问题解决：

(2)如图②，若点 B 的对应点恰好落在对角线 AC 上的点 M 处，若 $AM=2$ ， $MC=4$ ，求线段 AE 的长；

(3)如图③，若点 B 的对应点恰好落在 CD 边上的点 N 处，若点 N 为 CD 的一个三等分点($CN > DN$)，求

$\frac{CF}{BF}$ 的值。



第2题图

3. 综合与实践

问题情境：在数学活动课上，老师让同学们准备两张全等的直角三角形纸片， $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEF$ ， $AC = DF = 6 \text{ cm}$ ， $BC = EF = 8 \text{ cm}$ ， $\angle ACB = \angle DFE = 90^\circ$ 。

实践操作：

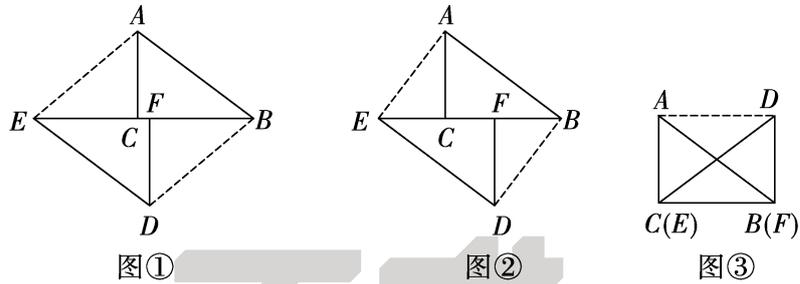
(1)如图①，把 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 的直角边 BC 和 EF 部分重合，使点 E, C, F, B 在同一条直线上，连接 AE 和 BD ，得到四边形 $AEDB$ 。请说明四边形 $AEDB$ 的形状并证明；

实践探究：

(2)如图②，勤奋小组的同学在图①的基础上，保持 $\triangle ABC$ 不动，将 $\triangle DEF$ 沿射线 CB 平移，得到四边形 $AEDB$ 是矩形，请求出此时 CE 的长；

探究引申：

(3)如图③，奇异小组的同学把边 BC 与边 EF 重合，连接 AD ， $\triangle ABC$ 固定不动，将 $\triangle DEF$ 沿射线 BC 平移，当四边形 $ACFD$ 是正方形时，直接写出 $\triangle DEF$ 平移的距离。



第3题图

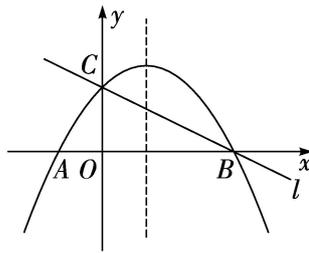
题型二 综合与探究

4. 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A, B(6, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, 3)$, 直线 l 过 B, C 两点.

(1) 求抛物线的函数表达式, 并求出直线 l 的函数表达式;

(2) 在抛物线的对称轴上是否存在一点 Q , 使得以 A, C, Q 为顶点的三角形是直角三角形? 若存在, 请直接写出点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若点 P 是抛物线上一动点, 过点 P 作直线 $PD \parallel x$ 轴交 BC 于点 D , 过点 P 作 $PE \perp$ 直线 BC 于点 E , 当 $DE = \frac{1}{2}CE$ 时, 求点 P 的横坐标.



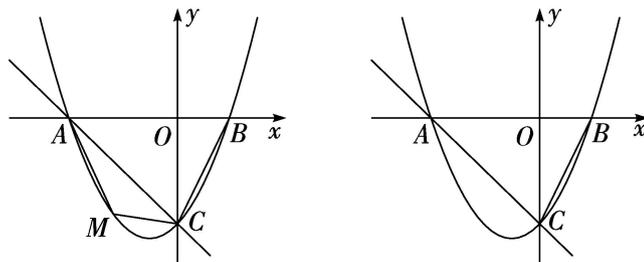
第4题图

5. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-4, 0), B(2, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 作直线 AC .

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) M 是直线 AC 下方抛物线上的一个动点, 连接 MA, MC, BC , 求四边形 $ABCM$ 面积的最大值及此时点 M 的坐标;

(3) 若 D 是抛物线的顶点, P 是抛物线上的一个动点. 是否存在点 P , 使得 $\angle ACP = \angle CAD$, 若存在, 请直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



备用图

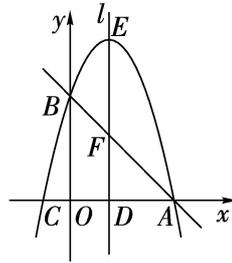
第5题图

6. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y_1 = ax^2 + 3x + c$ 经过 $A(4, 0), B(0, 4), C$ 三点, 其对称轴 l 交 x 轴于点 D , 交抛物线于点 E , 交直线 AB 于点 F .

(1) 求抛物线 y_1 的函数表达式;

(2) 点 P 为对称轴 l 上的动点, 若 $\triangle PBF$ 是等腰直角三角形, 求点 P 的坐标;

(3)将抛物线向右平移 $m(0 < m < 5)$ 个单位得到抛物线 y_2 ，记两条抛物线的交点为 M ，连接 AM ， BM ，当四边形 $AMBO$ 的面积最大时，请直接写出四边形 $AMBO$ 面积的最大值及此时 m 的值.



第 6 题图

万唯
原创

参考答案

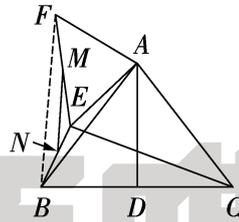
1. 解: (1) 90° ;

【解法提示】 $\because AB=AC=25, BC=30, AE=AF=\frac{3}{5}AB, EF=18, \therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{3}{5},$

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACB, \therefore \angle EAF = \angle BAC. \because AD \perp BC, \therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \angle EAF, \therefore EF \perp AB, \therefore \angle AGF = 90^\circ.$

(2) $MN = \frac{1}{2} CE.$

证明: 如解图①, 连接 $BF,$



第1题解图①

$\because AB=AC=25, BC=30, AE=AF=\frac{3}{5}AB,$

$\therefore AE=15.$

$\because AF=AE, EF=18,$

$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{3}{5},$

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACB,$

$\therefore \angle FAE = \angle BAC,$

$\therefore \angle FAB = \angle EAC,$

$\therefore \triangle AFB \cong \triangle AEC,$

$\therefore BF = CE.$

$\because M$ 是 EF 的中点, N 是 BE 的中点,

$\therefore MN$ 是 $\triangle EFB$ 的中位线,

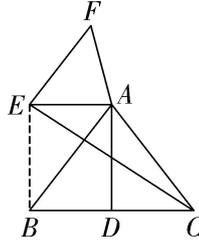
$\therefore MN = \frac{1}{2} BF,$

$\therefore MN = \frac{1}{2} CE;$

(3) α 为 $90^\circ, CE$ 的长为 $10\sqrt{13}.$

【解法提示】 如解图②, 连接 $BE,$ 由题意知, $AE=CD, \therefore$ 当以 A, E, D, C 为顶点的四边形是平行四边形时, $AE \parallel BC,$ 此时 $\alpha = \angle EAD = \angle ADC = 90^\circ. \because AE=CD=BD, AE \parallel BD, \therefore$ 四边形 $AEBD$ 是平行四边形, $\therefore BE \parallel AD, \therefore \angle EBC = \angle ADC = 90^\circ. \because AB=AC=25, BC=30, \therefore BD=AE=\frac{3}{5}AB=15, \therefore BE=AD$

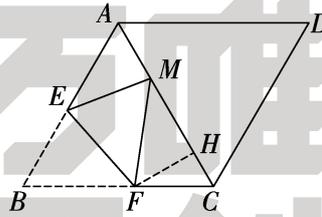
$$= \sqrt{AB^2 - BD^2} = 20, \therefore CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = 10\sqrt{13}.$$



第 1 题解图②

2. 解: (1) 四边形 $EBFO$ 为菱形. 理由如下:

- \because 点 B 与点 O 重合, 折痕为 EF ,
 - $\therefore BO$ 被 EF 垂直平分,
 - $\therefore BE = OE, BF = OF, \angle BGE = \angle BGF = 90^\circ$.
 - \because 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\therefore \angle EBG = \angle FBG$,
 - $\therefore \triangle EBG \cong \triangle FBG, \therefore BE = BF$,
 - $\therefore BE = OE = BF = OF, \therefore$ 四边形 $EBFO$ 为菱形;
- (2) 如解图①, 过点 F 作 $FH \perp AC$ 于点 H ,



第 2 题解图①

- \because 四边形 $ABCD$ 是菱形,
- $\therefore BA = BC, AD \parallel BC$,
- $\therefore \angle B + \angle BAD = 180^\circ$.
- $\because \angle BAD = 120^\circ$,
- $\therefore \angle B = 60^\circ$,
- $\therefore \triangle BAC$ 为等边三角形,
- $\therefore BC = AC = AM + MC = 6$,
- $\therefore \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ$,

由折叠可知, $MF = BF, \angle EMF = \angle B = 60^\circ$,

$$\therefore \angle EMA + \angle FMC = 180^\circ - \angle EMF = 120^\circ, \angle EMA + \angle AEM = 180^\circ - \angle EAM = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle FMC = \angle AEM.$$

$$\because \angle BAC = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle AEM \sim \triangle CMF,$$

$$\therefore \frac{AM}{AE} = \frac{CF}{CM}.$$

设 $FC = x$, 则 $BF = FM = 6 - x$,

$$\text{在 Rt}\triangle FHC \text{ 中, } CH = \frac{1}{2}x, FH = \frac{\sqrt{3}}{2}x, MH = 4 - \frac{1}{2}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle MFH \text{ 中, } MF^2 = FH^2 + MH^2,$$

$$\text{即}(6-x)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2,$$

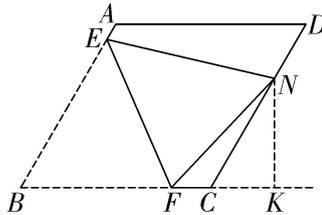
解得 $x=2.5$,

$$\therefore FC=2.5,$$

$$\therefore \frac{2}{AE} = \frac{2.5}{4},$$

$$\therefore AE = \frac{16}{5};$$

(3)如解图②, 过点 N 作 $NK \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 K ,



第 2 题解图②

由折叠可知, $FN=BF$,

\because 点 N 为 CD 的三等分点($CN > DN$),

设 $DN=a$, $CN=2a$,

\because 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore \angle BCD = \angle BAD = 120^\circ$, $BC = CD = 3a$,

$\therefore \angle NCK = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

设 $CF=x$, 则 $FN=BF=3a-x$,

在 $\text{Rt}\triangle NCK$ 中, $CN=2a$,

$\therefore CK=a$, $NK=\sqrt{3}a$,

在 $\text{Rt}\triangle NFK$ 中, $FN^2 = NK^2 + FK^2$,

即 $(3a-x)^2 = (\sqrt{3}a)^2 + (x+a)^2$,

解得 $x = \frac{5}{8}a$,

$$\therefore CF = \frac{5}{8}a, \quad BF = 3a - \frac{5}{8}a = \frac{19}{8}a,$$

$$\therefore \frac{CF}{BF} = \frac{\frac{5}{8}a}{\frac{19}{8}a} = \frac{5}{19}.$$

3. 解: (1) 四边形 $AEDB$ 是平行四边形.

证明: $\because \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEF$,

$\therefore AB = DE$, $\angle ABC = \angle DEF$.

$\therefore AB \parallel DE$.

\therefore 四边形 $AEDB$ 是平行四边形;

(2) \because 四边形 $AEDB$ 是矩形,

$\therefore \angle EAB = 90^\circ$.

$\because AC=6$, $BC=8$, $\angle ACB=90^\circ$,

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

在 $\text{Rt}\triangle EAB$ 中, $AE^2 = EB^2 - AB^2 = (CE + 8)^2 - 10^2$.

在 $\text{Rt}\triangle EAC$ 中, $AE^2 = CE^2 + AC^2 = CE^2 + 6^2$.

$$\therefore (CE + 8)^2 - 10^2 = CE^2 + 6^2.$$

解得 $CE = 4.5$,

$\therefore CE$ 的长为 4.5 cm;

(3) 2 cm 或 14 cm.

【解法提示】由题意可知四边形 $ACFD$ 是矩形, 当四边形 $ACFD$ 为正方形时, 即 $AC = CF = 6$, 当 FD 在 AC 的右侧时, $\therefore BC = 8$, \therefore 平移距离为 $8 - 6 = 2$ cm; 当 FD 在 AC 的左侧时, 平移距离为 $8 + 6 = 14$ cm.

4. 解: (1) \therefore 抛物线 $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 经过 $B(6, 0)$, $C(0, 3)$ 两点, 将 B, C 两点的坐标代入,

$$\text{得} \begin{cases} 0 = -\frac{1}{4} \times 36 + 6b + c \\ 3 = c \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b = 1 \\ c = 3 \end{cases},$$

\therefore 抛物线的函数表达式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$.

设直线 l 的表达式为 $y = kx + b' (k \neq 0)$,

\therefore 直线 l 过 B, C 两点, 将 $B(6, 0)$, $C(0, 3)$ 两点的坐标代入,

$$\text{得} \begin{cases} 0 = 6k + b' \\ b' = 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b' = 3 \end{cases}.$$

\therefore 直线 l 的函数表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + 3$;

(2) 存在, 点 Q 的坐标为 $(2, -\frac{8}{3})$ 或 $(2, \frac{5}{3})$;

【解法提示】令 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0$, 解得 $x_1 = -2, x_2 = 6$, $\therefore A(-2, 0)$, 对称轴为直线 $x = -\frac{1}{2 \times (-\frac{1}{4})}$

$= 2$, $\therefore A(-2, 0), C(0, 3)$, 设 $Q(2, q)$, $\therefore AC^2 = 13, AQ^2 = 16 + q^2, CQ^2 = q^2 - 6q + 13$, ①当 $\angle CAQ = 90^\circ$ 时, 由勾股定理, 得 $AC^2 + AQ^2 = CQ^2$, 即 $13 + 16 + q^2 = q^2 - 6q + 13$, 解得 $q = -\frac{8}{3}$; ②当 $\angle ACQ = 90^\circ$ 时,

由勾股定理, 得 $AC^2 + CQ^2 = AQ^2$, 即 $13 + q^2 - 6q + 13 = 16 + q^2$, 解得 $q = \frac{5}{3}$; ③当 $\angle AQC = 90^\circ$ 时, 由勾股

定理, 得 $AQ^2 + CQ^2 = AC^2$, 即 $16 + q^2 + q^2 - 6q + 13 = 13$, 方程无解. 综上所述, 点 Q 的坐标为 $(2, -\frac{8}{3})$ 或

$(2, \frac{5}{3})$.

(3) 设 $P(m, -\frac{1}{4}m^2 + m + 3)$,

$\therefore PD \parallel x$ 轴,

\therefore 点 D 的纵坐标为 $-\frac{1}{4}m^2 + m + 3$,

\therefore 点 D 在直线 BC 上, 将纵坐标代入,

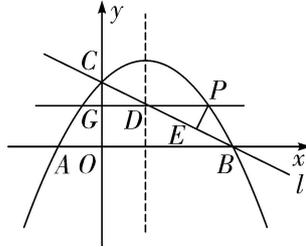
得 $-\frac{1}{4}m^2+m+3=-\frac{1}{2}x+3$, 解得 $x=\frac{1}{2}m^2-2m$,

∴点 D 的横坐标为 $\frac{1}{2}m^2-2m$, 即点 D 的坐标为 $(\frac{1}{2}m^2-2m, -\frac{1}{4}m^2+m+3)$.

在 $\text{Rt}\triangle BOC$ 中, ∵ $OC=3$, $OB=6$, $\angle BOC=90^\circ$,

∴由勾股定理可得 $BC=3\sqrt{5}$.

设直线 DP 与 y 轴交于点 G , 分两种情况讨论:



第 4 题解图①

①如解图①, 当点 D 在点 P 左侧时,

$$DP=m-(\frac{1}{2}m^2-2m)=-\frac{1}{2}m^2+3m,$$

∵ $DP \parallel x$ 轴,

∴ $\angle PDE = \angle CBO$.

$$\therefore \cos \angle PDE = \cos \angle CBO = \frac{OB}{BC} = \frac{DE}{DP} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore DE = \frac{2\sqrt{5}}{5} DP = -\frac{\sqrt{5}}{5} m^2 + \frac{6\sqrt{5}}{5} m.$$

∵ $DP \parallel x$ 轴,

∴点 G 的纵坐标为 $-\frac{1}{4}m^2+m+3$, $\angle CDG = \angle CBO$,

$$\therefore CG = CO - GO = 3 - (-\frac{1}{4}m^2+m+3) = \frac{1}{4}m^2 - m.$$

$$\therefore \sin \angle CDG = \sin \angle CBO = \frac{CO}{BC} = \frac{CG}{CD} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore CD = \sqrt{5} CG = \frac{\sqrt{5}}{4} m^2 - \sqrt{5} m,$$

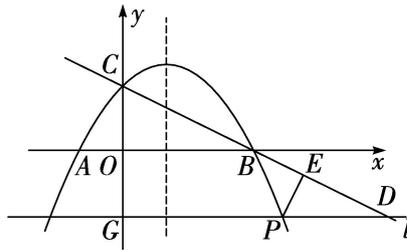
$$\therefore DE = \frac{1}{2} CE,$$

∴ $CD = DE$,

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{4} m^2 - \sqrt{5} m = -\frac{\sqrt{5}}{5} m^2 + \frac{6\sqrt{5}}{5} m.$$

解得 $m_1=0$ (舍), $m_2=\frac{44}{9}$;

②如解图②，当点 D 在点 P 右侧时，



第 4 题解图②

$$DP = \frac{1}{2}m^2 - 2m - m = \frac{1}{2}m^2 - 3m,$$

$\because DP \parallel x$ 轴,

$\therefore \angle PDE = \angle CBO,$

$$\therefore \cos \angle PDE = \cos \angle CBO = \frac{OB}{CB} = \frac{DE}{DP} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore DE = \frac{2\sqrt{5}}{5} DP = \frac{\sqrt{5}}{5} m^2 - \frac{6\sqrt{5}}{5} m.$$

$\because DP \parallel x$ 轴, $\angle CDG = \angle CBO,$

\therefore 点 G 的纵坐标为 $-\frac{1}{4}m^2 + m + 3$, 即 $GO = \frac{1}{4}m^2 - m - 3$,

$$\therefore CG = \frac{1}{4}m^2 - m.$$

$$\therefore \sin \angle CDG = \sin \angle CBO = \frac{CO}{BC} = \frac{CG}{CD} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore CD = \sqrt{5} CG = \frac{\sqrt{5}}{4} m^2 - \sqrt{5} m,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2} CE,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{3} CD,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{5} m^2 - \frac{6\sqrt{5}}{5} m = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{5}}{4} m^2 - \sqrt{5} m \right),$$

解得 $m_1 = 0$ (舍), $m_2 = \frac{52}{7}$.

综上所述, 点 P 的横坐标为 $\frac{44}{9}$ 或 $\frac{52}{7}$.

5. 解: (1) \because 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-4, 0)$, $B(2, 0)$, 将 A, B 两点的坐标代入,

$$\text{得} \begin{cases} 8 - 4b + c = 0 \\ 2 + 2b + c = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b = 1 \\ c = -4 \end{cases},$$

\therefore 抛物线的函数表达式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$;

(2) 在 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ 中, 令 $x = 0$, 得 $y = -4$,

$\therefore C(0, -4)$.

设直线 AC 的函数表达式为 $y=kx+a(k \neq 0)$,

将 $A(-4, 0)$, $C(0, -4)$ 代入,

$$\text{得} \begin{cases} 0 = -4k + a \\ -4 = a \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ a = -4 \end{cases}.$$

\therefore 直线 AC 的函数表达式为 $y = -x - 4$.

如解图①, 过点 M 作 $MF \parallel y$ 轴, 交 AC 于点 F ,

设点 M 的坐标为 $(d, \frac{1}{2}d^2 + d - 4)$, 则点 F 的坐标为 $(d, -d - 4)$,

$$\therefore MF = (-d - 4) - (\frac{1}{2}d^2 + d - 4) = -\frac{1}{2}d^2 - 2d.$$

$\therefore A(-4, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -4)$,

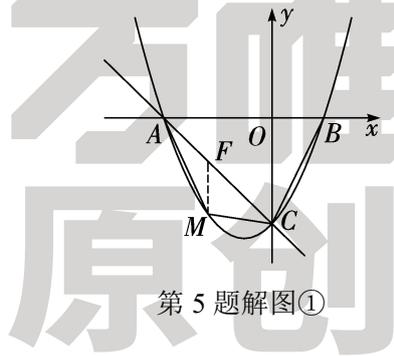
$\therefore OA = 4$, $AB = 6$, $OC = 4$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12, S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} MF \cdot OA = \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}d^2 - 2d) \times 4 = -d^2 - 4d = -(d+2)^2$$

+4.

当 $d = -2$ 时, $S_{\triangle ACM}$ 取得最大值, 最大值为 4.

\therefore 四边形 $ABCM$ 面积的最大值为 $12 + 4 = 16$, 此时 M 的坐标为 $(-2, -4)$;



第 5 题解图①

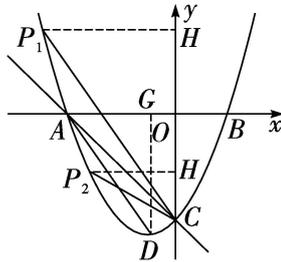
(3) 存在, 点 P 的坐标为 $(-5, \frac{7}{2})$ 或 $(-\frac{10}{3}, -\frac{16}{9})$.

【解法提示】 如解图②, 过点 D 作 $DG \perp x$ 轴于点 G , 过点 P 作 $PH \perp y$ 轴于点 H , 则 $\angle DGA = \angle CHP = 90^\circ$. 由题意得点 $D(-1, -\frac{9}{2})$, 设 $P(m, \frac{1}{2}m^2 + m - 4)$, $\therefore H(0, \frac{1}{2}m^2 + m - 4)$, $\therefore DG = \frac{9}{2}$, $AG = 3$, $CH = \frac{1}{2}m^2 + m - 4 - (-4) = \frac{1}{2}m^2 + m$, $PH = -m$, 分两种情况讨论: ① 当点 P 在直线 AC 上方时, 记为 P_1 , $\therefore \angle ACP_1 = \angle CAD$, $\therefore P_1C \parallel AD$, $\therefore \angle DAG = \angle CP_1H$. 又 $\therefore \angle DGA = \angle CHP_1 = 90^\circ$, $\therefore \triangle DAG \sim \triangle CP_1H$,

$$\therefore \frac{DG}{CH} = \frac{AG}{P_1H}, \text{ 即 } \frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}m^2 + m} = \frac{3}{-m}, \text{ 解得 } m = 0 (\text{舍去}) \text{ 或 } m = -5, \therefore \text{点 } P_1(-5, \frac{7}{2});$$

下方时, 记为 P_2 , 同理可证 $\triangle DAG \sim \triangle P_2CH$, $\therefore \frac{DG}{P_2H} = \frac{AG}{CH}$, 即 $\frac{\frac{9}{2}}{-m} = \frac{3}{\frac{1}{2}m^2 + m}$, 解得 $m = 0$ (舍去) 或 $m =$

$-\frac{10}{3}$, \therefore 点 $P_2(-\frac{10}{3}, -\frac{16}{9})$. 综上所述, 存在点 P 使得 $\angle ACP = \angle CAD$, 点 P 的坐标为 $(-5, \frac{7}{2})$ 或 $(-\frac{10}{3}, -\frac{16}{9})$.



第 5 题解图②

6. 解: (1) \because 抛物线 $y_1 = ax^2 + 3x + c$ 经过点 $A(4, 0)$, $B(0, 4)$, 将 A, B 两点的坐标代入,

$$\text{得} \begin{cases} 0 = 16a + 12 + c \\ 4 = c \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ c = 4 \end{cases},$$

\therefore 抛物线 y_1 的函数表达式为 $y_1 = -x^2 + 3x + 4$;

(2) 抛物线 y_1 的对称轴为直线 $x = -\frac{3}{2 \times (-1)} = \frac{3}{2}$,

$\because A(4, 0), B(0, 4)$,

\therefore 直线 AB 的函数表达式为 $y = -x + 4$,

令 $x = \frac{3}{2}$, 则 $y = -\frac{3}{2} + 4 = \frac{5}{2}$,

\therefore 点 F 的坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$,

若 $\triangle PBF$ 是等腰直角三角形, 分以下情况讨论:

① 当 $\angle P_1BF = 90^\circ$ 时, 如解图①, 分别过点 F, P_1 作 y 轴的垂线, 垂足分别为点 H, N , 易得 $\triangle FHB \cong \triangle BNP_1$,

由点 $F(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, 可得 $FH = \frac{3}{2}$,

$\therefore BN = FH = \frac{3}{2}$,

$\because OB = 4$, \therefore 点 P_1 的纵坐标为 $4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$,

\therefore 点 P_1 的坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$;

② 当 $\angle BP_2F = 90^\circ$ 时, 如解图①, 此时 $BP_2 \parallel x$ 轴,

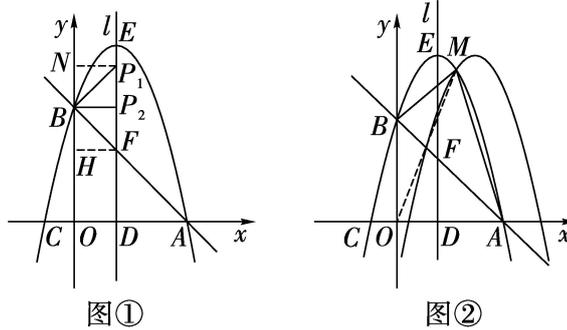
\because 点 B 的坐标为 $(0, 4)$,

\therefore 点 P_2 的纵坐标为 4 ,

\therefore 点 P_2 的坐标为 $(\frac{3}{2}, 4)$;

③ 当 $\angle PFB = 90^\circ$ 时, 此种情况不存在.

综上所述，满足条件的点 P 的坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$ 或 $(\frac{3}{2}, 4)$;



第 6 题解图

(3) 四边形 $AMBO$ 面积的最大值为 16，此时 m 的值为 1.

【解法提示】 $\because y_1$ 与 y_2 的交点为 M ， \therefore 设点 M 的坐标为 $(x, -x^2+3x+4)$ ， \because 点 $A(4, 0)$ ， $B(0, 4)$ ，

$\therefore AO=BO=4$ ，如解图②，连接 OM ，则 $S_{\text{四边形}AMBO} = S_{\triangle AOM} + S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2} AO \cdot y_M + \frac{1}{2} BO \cdot x_M = \frac{1}{2} \times 4 \times (-x^2 + 3x + 4) + \frac{1}{2} \times 4x = -2x^2 + 8x + 8 = -2(x-2)^2 + 16$ ， $\because -2 < 0$ ， \therefore 当 $x=2$ 时， $S_{\text{四边形}AMBO}$ 有最大值，最大值为 16，此时点 M 的坐标为 $(2, 6)$ ， $\because y_1$ 的表达式为 $y_1 = -x^2 + 3x + 4 = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4}$ ， \therefore 设平移后 y_2 的表达式为 $y_2 = -(x - \frac{3}{2} - m)^2 + \frac{25}{4}$ ，将点 $M(2, 6)$ 代入，得 $6 = -(2 - \frac{3}{2} - m)^2 + \frac{25}{4}$ ，解得 $m=1$ 或 $m=0$ (舍去). 综上所述， $S_{\text{四边形}AMBO}$ 面积的最大值为 16，此时 m 的值为 1.