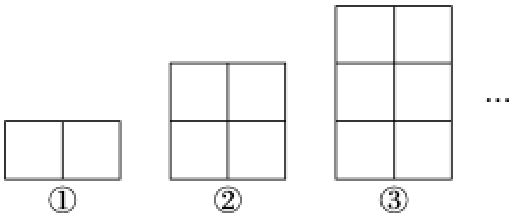
题型一　函数的实际应用

1. 如图，小明用长度相等的火柴棒搭出下列四边形．图①是由 7 根火柴棒搭成的 2 个小正方形，图②是由 12 根火柴棒搭成的 4 个小正方形，图③是由 17 根火柴棒搭成 的 6 个小正方形，…，依此规律继续搭，设搭成的四边形中小正方形的个数为 x（个），需要的火柴棒为 y（根）.



第 1 题图

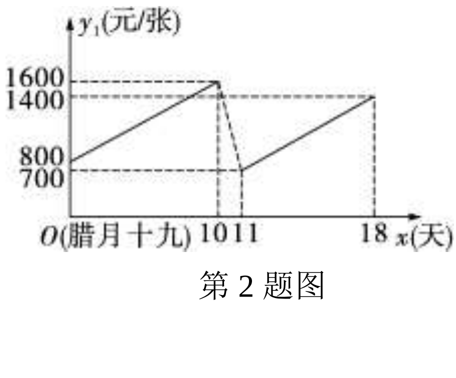
（1）求 y 与 x 之间的函数关系式；

（2）若小明有 30 根火柴棒，求搭成的四边形中小正方形的个数最多有多少个？

2. 每年春运的腊月二十至正月初七这 18 天（包含腊月二十和正月初七这两天，默认农历腊月为三十天）都会对航空公司的某条热门航线造成航运压力.今年航空公司对该航线下午 17：30 起飞的机票进行价格调整：票价 y_1（元/张）与腊月二十始第 x 天的函数关系如图所示，据历年的平均数据，搭乘该航班的人数 y_2 与 x 满足函数关系： $y_2=\begin{cases}30x+60(0\leqslant x\leqslant 10),\\200(11\leqslant x\leqslant 18).\end{cases}$

（1）求票价 y_1 与 x 之间的函数表达式；

（2）试估算该航班这 18 天期间哪一天的收入最高？最高收入是多少？



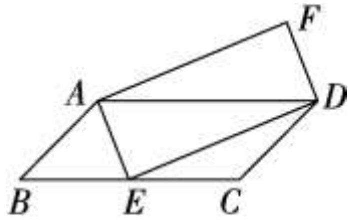
第 2 题图

题型二 与特殊四边形有关的证明与计算

3. 如图，在▱$ABCD$ 中，∠BAD 和∠ADC 的平分线交于点 E，且点 E 在 BC 上，$DF\parallel AE$，$AF\parallel DE$.

（1）求证：四边形 $AEDF$ 为矩形；

（2）若 $AE=AB=2$，求矩形 $AEDF$ 的面积.



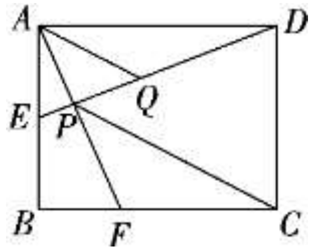
第 3 题图

4. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是边 AB 的中点，点 F 是 BC 边上一动点(不与点 B，C 重合)，连接 DE，AF 相交于点 P，连接 PC，过点 A 作 $AQ\parallel PC$ 交 DE 于点 Q.

（1）求证：$PC=2AQ$；

（2）若 $AF\perp DE$，且 $AD=2AB=8$，求 AF 的长；

（3）当点 F 为 BC 的中点时，求 $\dfrac{AP}{FP}$ 的值.



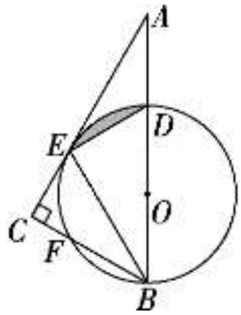
第 4 题图

题型三 与圆有关的证明与计算

5. 如图，在 Rt△ABC 中，∠C＝90°，D 是 AB 上一点，以 BD 为直径的⊙O 分别交 AC，BC 于点 E，F，E 恰好为 FD 的中点，连接 BE，DE.

（1）判断直线 CE 与⊙O 的位置关系，并说明理由；

（2）若 AD＝1，AE＝$\sqrt{3}$，求图中阴影部分的面积.

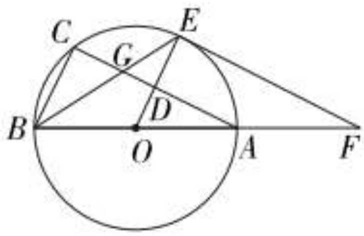


第 5 题图

6. 如图，△ABC 内接于⊙O，AB 是⊙O 的直径，D 为 AC 的中点，连接 OD 并延长交⊙O 于点 E，过点 E 作 AC 的平行线交 BA 的延长线于点 F，连接 BE，与 AC 交于点 G.

（1）求证：EF 是⊙O 的切线；

（2）若 EF＝12，$\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，求 CG 的长.



第 6 题图

题型四 二次函数性质综合题

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-2$，直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与 x 轴，y 轴分别交于 A，B 两点.

（1）求抛物线的对称轴及顶点坐标；

（2）若 $m=1$，点$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$)在该抛物线上，且$-2<x_1<-1$，$1<x_2<2$，比较 y_1，y_2 的大小，并说明理由；

（3）当抛物线与线段 AB 只有一个公共点时，请直接写出 m 的取值范围.

8. 定义：如果二次函数 y_1，y_2 满足 $y=k_1y_1+k_2y_2+c$ （k_1，k_2，c 为常数)为正比例函数，则称 y_1，y_2 互为“变换函数”，k_1，k_2，c 为这两个函数的变换系数；

（1）写出 $y_1=-x^2+2x-3$ 的一个“变换函数” y_2，并求出一组对应的变换系数；

（2）若二次函数 $y_1=x^2+b_1x+c_1$ 的图象与 y 轴交于点(0，-3)，将二次函数 $y_1=x^2+b_1x+c_1$ 的图象向左平移一个单位后得到一个新的二次函数 $y_2=a_2x^2+b_2x+c_2$，且 y_1 与 y_2 互为“变换函数”，变换系数为 $k_1=1$，$k_2=-1$，$c=-1$.求 a_2，b_1，c_1 的值；

（3）已知二次函数 $y_1=x^2-6x+5$ 的图象与 x 轴的一个交点为 $A(1，0)$，二次函数 $y_2=ax^2+bx+2m$ 的图象过 A 点，且 y_1 与 y_2 互为“变换函数”，变换系数为 $k_1=2$，$k_2=-1$，$c=m$，求 y_1-y_2+y 的最大值.

题型一　函数的实际应用

1. 解：（1）第①个图形中，有 2 个小正方形，火柴棒的根数是 7，

第②个图形中，有 4 个小正方形，火柴棒的根数是 12，

设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，

将(2 ,7) ,(4 ,12)分别代入函数关系式 $y=kx+b(k\neq 0)$中，

得$\begin{cases}7=2k+b\\12=4k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=\dfrac{5}{2}\\b=2\end{cases}$，

∴ $y=\dfrac{5}{2}x+2$，

∵ 第③个图形中，有 6 个小正方形，火柴棒的根数是 17，

∴ 将 $x=6$ 代入 $y=x+2$,得 $y=17$ ，满足题意，

∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=\dfrac{5}{2}x+2$；

（2）令 $y=30$,则 $\dfrac{5}{2}x+2=30$，

解得 $x=\dfrac{56}{5}$，

∵ 搭成的图形为四边形，

∴ x 为正偶数，

∴ x 最大为 10 ，

∴ 搭成的四边形中小正方形的个数最多有 10 个.

2.解：（1）当 $0\le x\le 10$ 时，设 $y_1=k_1x+b_1$，

由图象得$\begin{cases}b_1=800\\1600=10k_1+b_1\end{cases}$，解得$\begin{cases}k_1=80\\b_1=800\end{cases}$，

∴y_1 与 x 之间的函数表达式是 $y_1=80x+800(0\le x\le 10$，x 取整数)，

当 $11\le x\le 18$ 时，设 $y_1=k_2x+b_2$，

由图象得$\begin{cases}700=11k_2+b_2\\1400=18k_2+b_2\end{cases}$，解得$\begin{cases}k_2=100\\b_2=-400\end{cases}$，

∴y_1 与 x 之间的函数关系是 $y_1=100x-400(11\le x\le 18$，$x$ 取整数)，

综上所述，y_1 与 x 之间的函数表达式是

$y_1=\begin{cases}80x+800（0\leqslant x\leqslant 10，x取整数）\\100x-400（11\leqslant x\leqslant 18，x取整数）\end{cases}$；

（2）设该航班的收入 W，

当 $0\le x\le 10$ 时，W 与 x 之间的函数表达式为

$W=y_1\cdot y_2$

$=(80x+800)(30x+60)$

$=2400(x+6)^2-38400$，

∵$2400>0$，函数图象的对称轴为直线 $x=-6$，

∴$x>-6$ 时，W 随 x 的增大而增大，

∴当 $x=10$ 时，W 取得最大值，最大值为 576000 元；

当 $11\le x\le 18$ 时，W 与 x 之间的函数表达式为

$W=y_1\cdot y_2$

$=(100x-400)\times 200$

$=20000x-80000$，

∵$20000>0$，

∴W 随 x 的增大而增大，

∴当 $x=18$ 时，W 取得最大值，最大值为 280000 元.

∵$280000<576000$，

∴估算该航班这 18 天期间第 10 天的收入最高，最高收入是 576000 元.

题型二 与特殊四边形有关的证明与计算

3.（3）证明：∵$DF\parallel AE$，$AF\parallel DE$，

∴四边形 $AEDF$ 为平行四边形.

∵在▱$ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，

∴$\angle BAD+\angle CDA=180°$.

∵AE 平分$\angle BAD$，DE 平分$\angle CDA$，

∴$\angle DAE=\dfrac{1}{2}\angle BAD$，$\angle ADE=\dfrac{1}{2}\angle CDA$，

∴$\angle DAE+\angle ADE=\dfrac{1}{2}(\angle BAD+\angle CDA)=90°$，

∴$\angle AED=90°$，

∴四边形 $AEDF$ 为矩形；

（2）解：∵在▱$ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，

∴$\angle BEA = \angle DAE$.

∵AE 平分$\angle BAD$，

∴$\angle BAE = \angle DAE$，

∴$\angle BAE = \angle BEA$，

∴$AB = BE$.

∵$AE = AB$，

∴$AB = AE = BE$，

∴$\triangle ABE$ 是等边三角形，

∴$\angle BAE = \angle DAE = 60°$.

∵$AE = 2$，

∴在 $Rt\triangle ADE$ 中，

$DE = AE \cdot \tan\angle DAE = 2\sqrt{3}$，

∴矩形 $AEDF$ 的面积为 $AE \cdot DE = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

4.（1）证明：∵$AQ \parallel PC$，

∴$\angle AQE = \angle CPD$，

∵四边形 $ABCD$ 为矩形，点 E 为 AB 中点，

∴$AE \parallel CD$，$AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$，

∴$\angle AEQ = \angle CDP$，

∴$\triangle AEQ \backsim \triangle CDP$，

∴$\frac{AQ}{CP} = \frac{AE}{CD} = \frac{1}{2}$，

∴$PC = 2AQ$；

（2）解：∵$AD = 2AB = 8$，

∴$AB = 4$，

∴$AE = \frac{1}{2}AB = 2$，

∵$AF \perp DE$，

∴∠APE＝90°，

∴∠EAP＋∠AEP＝90°，

∵四边形 $ABCD$ 为矩形，

∴∠B＝∠DAE＝90°，

∴∠EAP＋∠AFB＝90°，

∴∠AEP＝∠AFB，

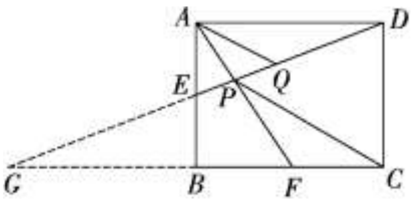
∴△ABF∽△DAE，

∴ $\frac{AB}{DA}=\frac{BF}{AE}$，即 $\frac{4}{8}=\frac{BF}{2}$

∴BF＝1，

在 Rt△ABF 中，$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{17}$；

（3）解：如解图，延长 DE 交 CB 的延长线于点 G，



第 4 题解图

∵点 E 是 AB 的中点，

∴AE＝BE，

∵四边形 $ABCD$ 为矩形，∴AD∥BC，∴∠ADE＝∠G，

在△ADE 与△BGE 中，

$$\begin{cases}\angle ADE=\angle G\\ \angle AED=\angle BEG,\\ AE=BE\end{cases}$$

∴△ADE≌△BGE(AAS)，

∴AD＝BG，

又∵AD＝BC，

∴GC＝BG＋BC＝2AD，

∵点 F 为 BC 的中点，

∴BC＝2BF，

∴BG＝AD＝BC＝2BF，

∴$GF=BG+BF=3BF$，

∴$\frac{AD}{GF}=\frac{2BF}{3BF}=\frac{2}{3}$,

由题意知，$AD\parallel GC$，

∴$\triangle APD\backsim\triangle FPG$，

∴ $\frac{AP}{FP}=\frac{AD}{FG}=\frac{2}{3}$.

题型三 与圆有关的证明与计算

5.解：（1）直线 CE 与⊙O 相切，理由如下：

如解图，连接 OE.

∵E 为 FD 的中点，

∴$\angle ABE=\angle EBF$，

∴$\angle DBF=2\angle EBD$.

∵ $\angle EOD=2\angle EBD$，

∴$\angle EOD=\angle DBF$，

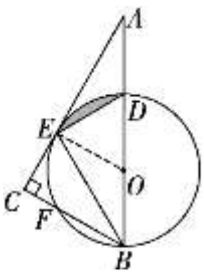
∴$OE\parallel BC$，

∵$\angle C=90°$，

∴$\angle AEO=90°$.

又∵点 E 在⊙O 上，

∴直线 CE 与⊙O 相切；



第 5 题解图

（2）如解图，设⊙O 的半径为 r，则 $AO=r+1$，

则在 Rt△AEO 中，由勾股定理得，$r^2+(\sqrt{3})^2=(r+1)^2$，

解得 $r=1$.则在 Rt△AEO 中，$\tan A=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$\angle A=30°$，

∴$\angle EOA=60°$.

∵$OD=OE$，

∴△ODE是等边三角形，

∴$S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形}EOD}-S_{\triangle EOD}=\frac{60\pi\times1^2}{360}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

6.解：（1）证明：

∵AC是⊙O的弦，OE是⊙O的半径，D为AC的中点，

∴$OE\perp AC$.

∵$EF\parallel AC$，

∴$OE\perp EF$，即$\angle OEF=90°$.

∵OE是⊙O的半径，

∴EF是⊙O的切线；

（2）解：如解图，连接AE.

∵$EF\parallel AC$，

∴$\angle F=\angle BAC$，

即$\sin F=\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∴$\frac{OE}{OF}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

设$OE=\sqrt{5}x$，则$OF=5x$.

在Rt△OEF中，$OE^2+EF^2=OF^2$，

∴$(\sqrt{5}x)^2+12^2=(5x)^2$，

解得$x=\frac{6\sqrt{5}}{5}$(负值已舍去)，

∴$OE=6$，

∴$OA=6$.

在Rt△AOD中，$OD=OA\cdot\sin\angle BAC=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore AD=\sqrt{OA^2-OD^2}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，$DE=OE-OD=6-\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

在 Rt△ABC 中，$\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$AB=2OA=12$，

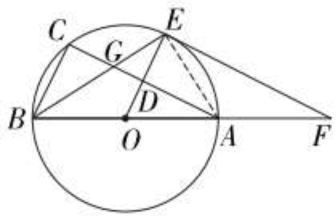
$\therefore BC=AB\cdot\sin\angle BAC=\frac{12\sqrt{5}}{5}=AD$.

在△BCG 和△ADE 中，

$\begin{cases}\angle CBG=\angle DAE\\ BC=AD\\ \angle BCG=\angle ADE=90^\circ\end{cases}$，

$\therefore$ △BCG≌△ADE，

$\therefore CG=DE=6-\frac{6\sqrt{5}}{5}$.



第 6 题解图

题型四 二次函数性质综合题

7.解：（1）∵抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-2=(x-m)^2-2$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=m$，顶点坐标为$(m，-2)$；

（2）$y_1>y_2$，理由如下：

∵$m=1$，

∴$y=x^2-2x-1$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

∵$a=1>0$，

∴当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小.

∵$-2<x_1<-1$，$1<x_2<2$，

∴x_1 关于对称轴 $x=1$ 对称的 t 的取值范围为 $3<t<4$，

$\therefore y_1>y_2$；

（3）m 的取值范围为 $-2\le m<2$ 或 $4-\sqrt{2}<m\le 4+\sqrt{2}$.

【解法提示】由直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$，得交点为 $A(4，0)$，$B(0，2)$，分三种情况讨论：①当抛物线过点 B 时，可得 $m^2-2=2$，解得 $m=2$ 或 $m=-2$.当 $m=2$ 时，抛物线的表达式为 $y=x^2-4x+2$，当 $-\frac{1}{2}x+2=x^2-4x+2$，解得 $x_1=0$ 或 $x_2=\frac{7}{2}$.$\because x_2=\frac{7}{2}<4$，$\therefore$两交点都在线段 AB 上．当 $m=-2$ 时，同理可得 $x_1=0$ 或 $x_2=-\frac{9}{2}$(负值舍去)，$\therefore -2\le m<2$；②当抛物线过点 A 时，可得 $(4-m)^2-2=0$，解得 $m=4+\sqrt{2}$ 或 $m=4-\sqrt{2}$，$\therefore 4-\sqrt{2}<m\le 4+\sqrt{2}$；③当直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 与抛物线的公共点为抛物线顶点时，$\because$ 由(1)知抛物线顶点的纵坐标为 -2，故此情况不存在．综上所述，m 的取值范围为 $-2\le m<2$ 或 $4-\sqrt{2}<m\le 4+\sqrt{2}$.

8.解：（1）由题意得：$y_2=x^2+2x+3$，

$\therefore y=k_1y_1+k_2y_2+c=k_1(-x^2+2x-3)+k_2(x^2+2x+3)+c$，

$\because y$ 为正比例函数，

$\therefore \begin{cases} k_1=k_2 \\ c=0 \end{cases}$，

$\therefore$一组对应的变换系数为 1，1，0(答案不唯一)；

（2）由题意得：$a_2=1$，

当 $x=0$ 时，$y_1=c_1=-3$，

$\because y_2=(x+1)^2+b_1(x+1)+c_1=x^2+(2+b_1)x+b_1-2$，

$\therefore y=y_1-y_2-1=x^2+b_1x-3-[x^2+(2+b_1)x+b_1-2]-1=-2x-b_1-2$，

$\because y=k_1y_1+k_2y_2+c$ 是正比例函数，

$\therefore -b_1-2=0$，即 $b_1=-2$，

$\therefore a_2=1$，$b_1=-2$，$c_1=-3$；

（3）$\because$ 二次函数 $y_2=ax^2+bx+2m$ 的图象过 $A(1，0)$，

$\therefore 0=a+b+2m$，即 $b=-a-2m$，

$\therefore y_2=ax^2-(a+2m)x+2m$，

$\because$ 变换系数为 $k_1=2$，$k_2=-1$，$c=m$，

$\therefore y=2y_1-y_2+m$

$=2(x^2-6x+5)-[ax^2-(a+2m)x+2m]+m$

$=(2-a)x^2+(a+2m-12)x+10-m$，

∵$y=k_1y_1+k_2y_2+c$ 为正比例函数，

∴$\begin{cases}2-a=0\\10-m=0\\a+2m-12\neq 0\end{cases}$，∴$\begin{cases}a=2\\m=10\end{cases}$，

∴$y_2=2x^2-22x+20$，$y=10x$，

∴$y_1-y_2+y=x^2-6x+5-(2x^2-22x+20)+10x=-(x-13)^2+154$，∴$y_1-y_2+y$ 在 $x=13$ 时取最大值，最大值为 154.